

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 33.

1. Zur Relativitätstheorie. II. Vierdimensionale Vektoranalysis¹⁾; von A. Sommerfeld.

§ 5. Die Differentialoperationen der vierdimensionalen Vektoranalysis.

An Stelle des allgemeinen Symbols lor (Lorentzoperation) von Minkowski führen wir die spezielleren Differentialoperationen ein

Div, Rot, Grad,

als vierdimensionale Erweiterungen der in der gewöhnlichen Vektorrechnung üblichen Operationen

div, rot, grad.

Das zusammenfassende Symbol lor wird man (ähnlich wie das Hamiltonsche ∇ in der gewöhnlichen Vektorrechnung) dann bevorzugen, wenn man unter Verzicht auf die anschauliche Bedeutung der einzelnen Schritte Vektorformeln symbolisch verifizieren will. Da hier aber, ebenso wie in Teil I, gerade auf die geometrische Deutung der Nachdruck gelegt werden soll, empfiehlt es sich, das Zeichen lor , je nach seiner Anwendung auf Sechser-, Vierervektoren oder Skalare, in der angegebenen Weise zu spezialisieren. Dabei kommt die Divergenzoperation in doppelter Bedeutung zur Verwendung, als *Vektordivergenz* und als *skalare Divergenz*, so daß es bei vier Dimensionen eigentlich vier fundamentale Vektoroperationen gibt, gegen die drei Differentialoperationen der gewöhnlichen Vektorrechnung. Zur Unterscheidung werde ich die Vektordivergenz mit deutschen Lettern schreiben (Div), die skalare mit lateinischen (Div).

1) Vgl. Teil I, Ann. d. Phys. 32. p. 749. 1910, an welchen die Numerierung der Gleichungen und Paragraphen anschließt.

Wir werden überall so operieren, als ob die vierte unserer Weltkoordinaten $xyz\iota$ reell wäre (vgl. hierzu die Anm. auf p. 752 von Teil I). Diese Fiktion stößt, soviel ich sehe, nirgends auf Schwierigkeiten, sie ist andererseits eine wesentliche Voraussetzung für die Einfachheit der geometrischen Ausdrucksweise, nach der wir im folgenden z. B. von einem Senkrechtstehen schlechtweg, statt von einem nichteuklidischen Senkrechtstehen sprechen werden, und ermöglicht es, die vierdimensionalen Vektorbegriffe aufs engste an die uns geläufigen dreidimensionalen anzuschließen.

Der folgende Weg, den wir zweimal in umgekehrter Richtung durchlaufen, läßt erkennen, daß unsere Aufzählung eine vollständige sein dürfte und daß alle hierbei erhaltenen Bildungen ihrer Definition nach vom Koordinatensystem unabhängig sind.

a) *Die skalare Divergenz.* Es sei $\Delta\Sigma$ ein beliebig gestaltetes vierdimensionales unendlich kleines Raumgebiet¹⁾ in der Umgebung des betrachteten Raumzeitpunktes Q , dS das Element der (dreidimensionalen) Begrenzung von $\Delta\Sigma$, n die äußere Normale auf dS . P sei ein beliebiger Vierervektor, P_n seine im Sinne von Gleichung (7) gebildete Normalkomponente. Aus dem Vierervektor P entsteht eine skalare Größe $\text{Div } P$, die wir folgendermaßen definieren²⁾:

$$(16) \quad \text{Div } P = \lim_{\Delta\Sigma=0} \frac{\int P_n dS}{\Delta\Sigma},$$

wobei die Integration nach dS über die ganze Begrenzung von $\Delta\Sigma$ zu erstrecken ist.

Wählen wir $\Delta\Sigma$ speziell als vierdimensionales Parallelepiped mit den Kantenlängen $dx dy dz d\iota$, so haben wir

$$(16a) \quad \text{Div } P = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} + \frac{\partial P_\iota}{\partial \iota}.$$

1) Wir bezeichnen durchgehends mit ds , $d\sigma$, dS , $d\Sigma$ das Element einer Linie, Fläche, eines drei- oder vierdimensionalen Raumes, gleichviel ob z. B. dS einen gekrümmten oder „ebenen“ dreidimensionalen Raum bedeutet.

2) Damit ein solcher Limes existiert, muß P natürlich gewissen Stetigkeitsbedingungen genügen; daß der Limes von der Form des Gebietes $\Delta\Sigma$ unabhängig ist, sieht man z. B., wenn man $\Delta\Sigma$ in hinreichend kleine Paralleloipede unterteilt. Die entsprechende Bemerkung gilt für alle folgenden analogen Grenzübergänge.

Ist P die in (1) definierte Viererdichte, so wird, wie Minkowski bemerkt,

$$\text{Div } P = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \varrho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \varrho v_z}{\partial z} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} \right)$$

mit der linken Seite der *Kontinuitätsgleichung* in der gewöhnlichen Hydrodynamik kompressibler Flüssigkeiten (bis auf den Faktor $1/c$) identisch.

b) *Die Vektordivergenz.* Während wir unter a) von einem Vektor erster Art (Vierervektor) ausgingen und einen „Vektor nullter Art“ (Skalar) erhielten, gehen wir jetzt von einem *Vektor zweiter Art* (Sechservektor) aus und leiten daraus einen *Vektor erster Art* (Vierervektor) ab. Die Komponente desselben nach einer beliebigen Richtung s definieren wir folgendermaßen. Sei S der durch den betrachteten Raumzeitpunkt Q senkrecht zu s gelegte dreidimensionale Raum, ΔS ein unendlich kleines Gebiet desselben in der Umgebung von Q , $d\sigma$ das Element seiner (zweidimensionalen) Begrenzung; die zu diesem senkrechte Ebene, die nach der Anm. 2 auf p. 753 eindeutig bestimmt ist und sowohl die Richtung s , wie die im Raume S gelegene (äußere) Normalenrichtung n von $d\sigma$ enthält, werde durch sn angedeutet, und es bezeichne $f_{s,n}$ die im Sinne der Gleichung (8) gebildete Komponente des Sechservektors f nach dieser Ebene. Dann sei die s -Komponente der *Vektordivergenz* von f :

$$(17) \quad \text{Div } f_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\int f_{s,n} d\sigma}{\Delta S},$$

wo sich die Integration nach $d\sigma$ auf die ganze Begrenzung von ΔS bezieht.

Wählen wir speziell s als x -Richtung, ΔS als ein im yzl -Raume gelegenes dreidimensionales Parallelepiped von den Kantenlängen dy , dz , dl , so ergibt sich nach (17)

$$\begin{aligned} \text{Div } f_x &= \frac{1}{dy \, dz \, dl} \left\{ dz \, dl \cdot \frac{\partial f_{xy}}{\partial y} dy + dl \, dy \cdot \frac{\partial f_{xz}}{\partial z} dz \right. \\ &\quad \left. + dy \, dz \cdot \frac{\partial f_{xl}}{\partial l} dl \right\} = \frac{\partial f_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial f_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial f_{xl}}{\partial l} \end{aligned}$$

und etwas allgemeiner für eine beliebige der Koordinatenrichtungen $j = x, y, z, l$:

$$(17a) \quad \text{Div } f_j = \frac{\partial f_{jx}}{\partial x} + \frac{\partial f_{jy}}{\partial y} + \frac{\partial f_{jz}}{\partial z} + \frac{\partial f_{jl}}{\partial l},$$

in welchem Ausdruck natürlich einer der vier Differentialquotienten wegen $f_{jj} = 0$ verschwindet. Die formale Übereinstimmung dieser Bildung mit derjenigen in (16a) möge die Beibehaltung desselben Namens trotz der verschiedenen geometrischen Bedeutung motivieren.

Bedeutet im besonderen f den Sechservektor des Feldes, so wird z. B. für $j = x$ wegen (2) und (2a)

$$\text{Div } f_x = \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t}$$

und für $j = l$:

$$\text{Div } f_l = i \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} \right).$$

Nach den Feldgleichungen ist ersterer Ausdruck gleich $\rho v_x/c$, letzterer gleich $i\rho$, so daß aus dem Feldvektor durch die Operation Div direkt die Viererdichte entsteht. Die eine Hälfte der Maxwell-Lorentzschen Gleichungen einschließlich der elektrischen Divergenzbedingung schreibt sich daher einfach

$$(18) \quad \text{Div } f = P.$$

c) *Die Ergänzung der Rotation.* Wir gehen von einem *Vektor dritter Art* \mathfrak{A} (*dreidimensionale Raumgröße*, vgl. Teil I, p. 759) aus, neben dem wir zugleich seine *Ergänzung* (einen *Vektor erster Art*) betrachten, den wir hier zum Unterschiede mit \mathfrak{B} bezeichnen wollen, wobei z. B. $\mathfrak{B}_x = \mathfrak{A}_{yzi}$ ist. Wir leiten daraus einen *Vektor zweiter Art*, die *Rotation* von \mathfrak{A} bzw. die *Ergänzung der Rotation* von \mathfrak{B} ab; ihre Komponente nach einer Ebene $s's''$ definieren wir folgendermaßen: Sei σ die zu $s's''$ senkrechte Ebene durch den betrachteten Punkt Q , $\Delta\sigma$ ein unendlich kleines Gebiet von σ in der Umgebung von Q , ds ein Element der Begrenzung von $\Delta\sigma$. Der Normalraum auf ds enthält die Richtungen $s's''$ und die Richtung der innerhalb $\Delta\sigma$ gezogenen äußeren Normalen n auf ds . Die Komponente von \mathfrak{A} nach diesem Normalraum ist $\mathfrak{A}_{s's''n} = \mathfrak{B}_s$. Dann sei die Komponente der Rotation von \mathfrak{A} nach der Ebene $s's''$:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{Rot}_{s's''} \mathfrak{A} &= \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\int \mathfrak{A}_{s's''n} ds}{\Delta\sigma} \\ &= \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\int \mathfrak{B}_s ds}{\Delta\sigma}. \end{aligned} \right.$$

Ist z. B. $\Delta\sigma$ ein Rechteck mit den Seitenlängen dn , ds , wobei die Aufeinanderfolge der Richtungen $s's''ns$ die positive, d. h. dieselbe sei wie die der Achsen $xyzl$, so wird:

$$(19a) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{Rot}_{s's''} \mathfrak{A} &= \frac{1}{dn ds} \left\{ ds \cdot \frac{\partial \mathfrak{B}_s}{\partial n} dn - dn \cdot \frac{\partial \mathfrak{B}_n}{\partial s} ds \right\} \\ &= \frac{\partial \mathfrak{B}_s}{\partial n} - \frac{\partial \mathfrak{B}_n}{\partial s}. \end{aligned} \right.$$

Der unten folgenden Definition für die Rotation eines Vektors erster Art \mathfrak{B} und der früheren Gleichung (4c) für den Zusammenhang eines Sechservektors mit seiner Ergänzung entspricht es, wenn wir hierfür auch schreiben:

$$(19b) \quad \text{Rot}_{n,s} \mathfrak{B} = \text{Rot}_{s',s''}^* \mathfrak{B} = \text{Rot}_{s',s''} \mathfrak{A} = \text{Rot}_{n,s}^* \mathfrak{A}.$$

Durch die Definition (19) berechnen wir also für den *Vektor erster Art* \mathfrak{B} die *Ergänzung der Rotation* nach der Ebene $s's''$ oder die Rotation nach der dazu senkrechten Ebene ns , zugleich aber auch für den *Vektor dritter Art* \mathfrak{A} die *Rotation* für die Ebene $s's''$ oder ihre Ergänzung für die dazu normale Ebene ns

d) *Der Gradient.* Dem bisherigen Wege würde es entsprechen, jetzt von einer vierdimensionalen Raumgröße U auszugehen, die als ungerichtet *skalaren* Charakter haben wird, und aus ihr einen *Vektor dritter Art* abzuleiten, der durch seine Komponente nach dem beliebigen Raum $s's's''$ zu geben sein wird. Hierzu hätten wir in der zu $s's's''$ normalen Richtung n ein unendlich kleines, lineares Gebiet Δn abzugrenzen und als Ersatz für die ausgeartete Integration über die Begrenzungspunkte von Δn die Differenz ΔU sowie schließlich als Komponente des entstehenden Vektors dritter Art zu bilden:

$$\text{Grad}_{s's's''} U = \lim_{\Delta n=0} \frac{\Delta U}{\Delta n} = \frac{\partial U}{\partial n}.$$

Statt dessen werden wir jetzt unser Verfahren dual umkehren, von dem Vektor nullter Art V , d. h. einer ebenfalls *skalaren* Größe ausgehen und daraus einen *Vektor erster Art*, den *Gradienten* von V , ableiten, indem wir seine Komponente nach einer Richtung s entsprechend definieren durch:

$$(20) \quad \text{Grad}_s V = \frac{\partial V}{\partial s},$$

insbesondere also seine vier rechtwinkligen Komponenten durch:

$$(20a) \quad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial t}.$$

c') *Die Rotation.* Jetzt gehen wir von einem *Vektor erster Art* \mathfrak{B} aus und leiten daraus einen *Vektor zweiter Art*, seine *Rotation*, ab. Ihre Komponente nach einer beliebigen Ebene gewinnen wir, indem wir in dieser Ebene ein Gebiet $\Delta\sigma$ abgrenzen, um dieses herum das Linienintegral von \mathfrak{B} erstrecken usw. nach der zu (19) und (19a, b) analogen Formel

$$(21) \quad \text{Rot}_{s's''} \mathfrak{B} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\int \mathfrak{B}_s ds}{\Delta\sigma} = \frac{\partial \mathfrak{B}_{s''}}{\partial s'} - \frac{\partial \mathfrak{B}_{s'}}{\partial s''}.$$

Unter $s's''$ sind zwei zueinander senkrechte, in $\Delta\sigma$ gelegene Richtungen verstanden, so zwar, daß die Drehung von s' nach s'' denselben Sinn hat, wie der Umlauf von s um $\Delta\sigma$. Bei dem jetzigen Verfahren erhalten wir also direkt die Rotation des Vektors erster Art, statt wie bei c) ihre Ergänzung.

Ein geeignetes Beispiel liefert der Begriff des elektrodynamischen Potentials, auf dessen naturgemäße Einführung wir im nächsten Paragraphen bei Gleichung (25a) zurückkommen, während wir ihn hier nur historisch anführen. Man fasse das Vektorpotential \mathfrak{A} und das skalare Potential φ der gewöhnlichen Theorie zu dem „Viererpotential“ Φ zusammen, mit den Komponenten

$$(21a) \quad \Phi_x = \mathfrak{A}_x, \quad \Phi_y = \mathfrak{A}_y, \quad \Phi_z = \mathfrak{A}_z, \quad \Phi_t = i\varphi.$$

Aus ihm berechnet sich das Feld durch die einheitliche Formel

$$(21b) \quad f = \text{Rot } \Phi,$$

z. B. (vgl. (21)):

$$(21b) \quad \begin{cases} f_{xy} = \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}, \\ f_{xt} = \frac{\partial \Phi_t}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial t} = i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t} \right), \end{cases}$$

welche die unsymmetrischen Formeln der gewöhnlichen Theorie:

$$\mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{E} = - \text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$$

zusammenfaßt. Zwischen dem skalaren und Vektorpotential hat man in der gewöhnlichen Theorie die unübersichtliche Bedingung:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0;$$

diese lautet jetzt einfach nach (16 a)

$$(21 \text{ c}) \quad \operatorname{Div} \Phi = 0.$$

b') *Die Ergänzung der Vektordivergenz.* Ausgehend von einem Vektor zweiter Art f leiten wir die Komponente eines Vektors dritter Art nach einem beliebigen Raum S ab, indem wir innerhalb S ein unendlich kleines Raumstück ΔS abgrenzen mit dem zweidimensionalen Oberflächenelement $d\sigma$ und den in ihm enthaltenen zueinander senkrechten Richtungen $s' s''$; s sei die Normale von S . Während wir in b) die Normalkomponente von f zu $d\sigma$ bildeten, betrachten wir jetzt das Flächenintegral der Tangentialkomponente von f , nämlich:

$$(22) \quad \operatorname{Div} f_s^* = \operatorname{Lim}_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\int f_{s' s''} d\sigma}{\Delta S}.$$

Wählen wir speziell s als x -Richtung und ΔS als dreidimensionales Parallelepiped im yzl -Raum, so werden die drei Flächenpaare $s' s''$ seiner Begrenzung bzw. parallel zl , ly , yz und daher

$$(22 \text{ a}) \quad \operatorname{Div} f_x^* = \frac{\partial f_{xl}}{\partial y} + \frac{\partial f_{ly}}{\partial x} + \frac{\partial f_{yz}}{\partial l}.$$

Für die rechte Seite können wir nach (4 b) auch schreiben:

$$\frac{\partial f_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial f_{xz}^*}{\partial x} + \frac{\partial f_{xl}^*}{\partial l},$$

wodurch die gewählte Bezeichnung $\operatorname{Div} f_x^*$ und allgemeiner $\operatorname{Div} f_s^*$ im Hinblick auf (17 a) gerechtfertigt wird. Bedeutet f speziell den Feldvektor, so hat man nach (22 a) und (2):

$$\operatorname{Div} f_x^* = i \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} \right),$$

ähnlich für die y - und z -Richtung und für die l -Achse:

$$\operatorname{Div} f_l^* = \frac{\partial f_{lx}^*}{\partial x} + \frac{\partial f_{ly}^*}{\partial y} + \frac{\partial f_{lz}^*}{\partial z} = - \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} \right).$$

Diese Ausdrücke verschwinden aber nach den Maxwell-Lorentzischen Feldgleichungen; die zweite Hälfte dieser Glei-

chungen einschließlich der magnetischen Divergenzbedingung schreibt sich also:

$$(18^*) \quad \text{Div } f^* = 0.$$

a') *Die skalare Divergenz.* Ausgehend von einem *Vektor dritter Art* und seinen Komponenten nach den Tangentialräumen eines vierdimensionalen Raumstückes $\Delta\Sigma$ könnte man schließlich aus dem Vektor dritter Art eine *skalare* Größe, seine Divergenz, durch die zu a) analoge Definition ableiten. Wegen der Vertauschbarkeit der Vektoren dritter und erster Art untereinander (vgl. den Schluß von § 1) würde dadurch gegenüber a) nichts Neues entstehen.

Die hier betrachteten Differentialoperationen sind ihrer geometrischen Einführung nach, bei der von einem Koordinatensystem überhaupt nicht die Rede war, unabhängig von der Wahl des Bezugssystems; ihre Koordinatenausdrücke verhalten sich also *invariant* bzw. *kovariant* gegen Lorentztransformationen. Dies gilt insbesondere von den Feldgleichungen (18) und (18*). Die umständlichen Rechnungen, durch die Lorentz (1895 und 1904) und Einstein (1905) ihre vom Koordinatensystem unabhängige Gültigkeit erweisen und die Bedeutung der transformierten Feldvektoren feststellen mußten, werden also im System der Minkowskischen „Welt“ gegenstandslos.

§ 6. Die Integralsätze von Gauss, Stokes, Green in vier Dimensionen.

So wie man in der gewöhnlichen Vektorrechnung die Sätze von Gauß und Stokes unmittelbar aus dem Begriff der *div* und *rot* erhält und den Greenschen Satz mittels des Begriffes *grad* an den Gausssschen anschließt, so wird man hier aus den Begriffen der skalaren und vektoriellen Divergenz und der Rotation drei Integralsätze gewinnen, die wir als *Gauss-schen*, *Gauss-Stokesschen* und *Stokesschen Satz* bezeichnen wollen; dabei steht der „Gauss-Stokessche Satz“ ebenso in der Mitte zwischen dem eigentlichen Gausssschen und Stokes-schen Satz, wie der Begriff der Vektordivergenz zwischen demjenigen der skalaren Divergenz und der Rotation steht. Der *Greensche Satz* folgt dann aus der Verbindung des Gauss-schen Satzes mit dem Begriff des Gradienten.

a) *Der Gauss'sche Satz* Er lautet, wenn P einen Vierervektor, Σ ein vierdimensionales Raumgebiet, S seine dreidimensionale Begrenzung mit der äußeren Normalen n bedeutet:

$$(23) \quad \int_{\Sigma} \text{Div } P d\Sigma = \int_S P_n dS.$$

Teilt man nämlich das Raumgebiet Σ in hinreichend kleine Raumelemente $d\Sigma$ auf und wendet auf jedes derselben Gleichung (16) an, so heben sich von den $f dS$ über die Begrenzungen alle inneren auf, weil sie doppelt mit entgegengesetztem Vorzeichen vorkommen, und es bleiben nur die Anteile der äußeren Begrenzung S von Σ übrig.

Im besonderen sei $\text{Div } P = 0$. Konstruiert man eine Röhre von P -Linien (Linien, die überall die Richtung des Vektors P haben) und schneidet diese Röhre an einer beliebigen Stelle mit einem („ebenen“ oder gekrümmten) Raum S , so erhält man, dem Gauss'schen Satz zufolge, stets denselben Wert von $\int P_n dS$. Hierin liegt, wenn P die Viererdichte bedeutet, die Unabhängigkeit der Ladung vom Bezugssystem (vgl. I, p. 752).

b) *Die beiden Formen des Gauss-Stokesschen Satzes.* Es sei f ein Sechservektor, S ein beliebiges (nicht notwendig „ebenes“) dreidimensionales Raumstück, welches innerhalb der vierdimensionalen „Welt“ gelegen ist, und s die Normale auf einem Element dS desselben. Die Begrenzung des Raumes S , welche eine geschlossene zweifach ausgedehnte Fläche sein wird, sei σ ; das einzelne Element $d\sigma$ derselben denken wir uns durch die beiden zueinander senkrechten Richtungen $s' s''$, das zu $d\sigma$ normale Flächenelement durch die Richtungen s (senkrecht zu S) und n (innerhalb S senkrecht zu $d\sigma$) bestimmt. Je nachdem wir f auf das zu $d\sigma$ normale Flächenelement oder auf $d\sigma$ selbst projizieren, erhalten wir die Komponenten $f_{s'n}$ oder $f_{s's''}$. Dann gilt nach den Gleichungen (17) und (22):

$$(24) \quad \int_S \text{Div } f_s dS = \int_{\sigma} f_{s'n} d\sigma$$

und

$$(24^*) \quad \int_S \text{Div } f_s^* dS = \int_{\sigma} f_{s's''} d\sigma.$$

Der Beweis (Zerlegung des Raumes S in hinreichend kleine Elemente ΔS usw.) ist derselbe wie unter a.)

Man kann diese beiden Formen des Gauss-Stokesschen Satzes benutzen, um die Maxwell'schen *Differentialgleichungen* (18) und (18a) in *Integralform* umzuschreiben.

Man betrachte zu dem Zwecke eine zweifach ausgedehnte, in der „Welt“ gelegene geschlossene Fläche σ , lege durch sie einen dreifach ausgedehnten Raum S und verstehe unter $s' s'' s_n$ Richtungen, wie sie oben erklärt wurden. Dann gilt wegen (24) und (18) bzw. wegen (24*) und (18*):

$$(24a) \quad \int_{\sigma} f_{s'n} d\sigma = \int_S P_s dS, \quad \int_{\sigma} f_{s's''} d\sigma = 0.$$

Um das Verhältnis dieser Formeln zu der gewöhnlichen Integralformulierung der Maxwell'schen Gleichungen hervortreten zu lassen, betrachten wir zwei spezielle Fälle:

1. Die Fläche σ liegt im xyz -Raum. Dann ist

$$s = l, \quad P_s = i\rho, \quad f_{s'n} = i\mathfrak{E}_n, \quad f_{s's''} = \mathfrak{S}_n$$

und wir haben die bekannten Beziehungen:

$$\int \mathfrak{E}_n d\sigma = \int \rho dS, \quad \int \mathfrak{S}_n d\sigma = 0.$$

2. Die Fläche σ sei ein unendlich flacher Zylinder, dessen Basis im xyz -Raum liegt mit Erzeugenden (Länge dl) parallel der l -Achse. Von dem Mantel des Zylinders herrührend erhält man für die linken Seiten von (24a), wenn s' längs der Kontur des Mantels gemessen wird:

$$dl \int \mathfrak{S}_{s'} ds' \quad \text{bzw.} \quad -i dl \int \mathfrak{E}_{s'} ds'.$$

Nimmt man andererseits die beiden Basisflächen des Zylinders zusammen, so ist für diese $n = l$ und es bedeutet s die im xyz -Raum gelegene Normale auf der Basisfläche. Ihr Beitrag wird daher:

$$-i dl \int \frac{\partial \mathfrak{E}_s}{\partial t} d\sigma \quad \text{bzw.} \quad dl \int \frac{\partial \mathfrak{S}_s}{\partial t} d\sigma,$$

wobei das erste Integral den durch die Basisfläche hindurchtretenden Verschiebungsstrom, das zweite die zeitliche Änderung der magnetischen Kraftlinienzahl mißt. Zugleich wird

$$\int P_s dS = dl \int P_s d\sigma,$$

bis auf den Faktor dl der im xyz -Raum senkrecht zu σ hindurchtretende Konvektionsstrom. Bei der in Rede stehenden zylindrischen Spezialisierung des Integrationsgebietes gehen also unsere Flächenintegrale (24 a) in die bekannte Integralform der Maxwell'schen Gleichungen in gewöhnlicher Schreibweise über:

$$\int \mathfrak{S}_s ds' = \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \rho v \right) d\sigma, \quad \int \mathfrak{E}_s ds' = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} d\sigma.$$

c) *Der Stokessche Satz.* Bedeutet s einen beliebig in der Welt gelegenen geschlossenen eindimensionalen Umgang, σ eine von s berandete zweifach ausgedehnte Fläche, Φ einen Vierervektor, so ergibt sich der Stokessche Satz als unmittelbare Folge der Definitionsgleichung (21) bei der dort erklärten Lage und Reihenfolge der Richtungen $s's''$ in der Form:

$$(25) \quad \int_{\sigma} \text{Rot}_{s's''} \Phi d\sigma = \int_s \Phi_s ds.$$

Man kann bemerken, daß man auch bei der gewöhnlichen dreidimensionalen Formulierung des Stokesschen Satzes nicht, wie es gewöhnlich geschieht, von der Normalkomponente, sondern von der Tangentialkomponente der Rotation sprechen sollte, da die Rotation auch dort ein Vektor zweiter Art ist. Würden wir hier von der Ergänzung der Rotation (vgl. den vorigen Paragraphen unter c) ausgegangen sein, so wären wir ebenfalls zu Gleichung (25) gelangt.

Handelt es sich im besonderen um eine *geschlossene* Fläche σ , so verschwindet ihre Randkurve und daher auch die rechte Seite von (25) und wir haben

$$\int_{\sigma} \text{Rot}_{s's''} \Phi d\sigma = 0.$$

Dementsprechend ergibt sich aus der zweiten Form des Gauss-Stokesschen Satzes (24*), in der ja auf der rechten Seite über eine geschlossene Fläche σ zu integrieren war, wenn wir dort f gleich der Rotation eines beliebigen Vierervektors Φ eintragen:

$$\int \text{Div Rot}^* \Phi dS = 0.$$

Da diese Gleichung für jedes beliebige Gebiet S gilt, schließen wir auf die identische Beziehung

$$(25a) \quad \text{Div Rot}^* \Phi = 0;$$

„die Vektordivergenz von der Ergänzung der Rotation eines beliebigen Vierervektors verschwindet.“ Dies ist auch leicht an den Koordinatenausdrücken (17a) der Vektordivergenz und (21b) der Rotation zu verifizieren.

Gleichung (25a) liefert zugleich die Rechtfertigung für die Einführung des elektrodynamischen Potentials Φ , die im vorigen Paragraphen unter c') nur historisch mitgeteilt wurde. Da nämlich durch den Ansatz (21b) $f = \text{Rot } \Phi$ die zweite Maxwell'sche Gleichung $\text{Div } f^* = 0$ nach (25a) identisch erfüllt ist, erübrigt es nur, Φ so zu bestimmen, daß es auch der ersten Maxwell'schen Gleichung $\text{Div } f = P$ genügt, die nunmehr übergeht in

$$(25b) \quad \text{Div Rot } \Phi = P.$$

Diese vierdimensionale Vektorgleichung stellt die denkbar einfachste Form der Maxwell'schen Theorie für das Vakuum dar; mit ihrer Integration wird sich der folgende Paragraph beschäftigen.

Indessen ist durch den Ansatz $f = \text{Rot } \Phi$ bei gegebenem f der Vektor Φ noch nicht völlig bestimmt. Ist nämlich Φ_1 ein solcher Vektor, so erhalten wir in $\Phi = \Phi_1 + \Psi$ einen allgemeineren Vektor, der ebenfalls der Bedingung $f = \text{Rot } \Phi$ genügt, falls Ψ einen Vektor von überall verschwindender Rotation bedeutet. Ein solcher ist, wie leicht aus dem Stokesschen Satze folgt, stets als Gradient einer skalaren Ortsfunktion U darstellbar, die ihrerseits gegeben wird durch das Linienintegral $\int \Psi ds$, erstreckt von einem beliebigen festen zu dem gerade betrachteten Raumzeitpunkte. Man erkennt hieraus, daß man dem Potential Φ immer noch die Nebenbedingung

$$(25c) \quad \text{Div } \Phi = 0$$

auflegen kann. Diese liefert nämlich für die sonst völlig unbestimmte Funktion U die Bedingung

$$\text{Div } \Psi = \text{Div Grad } U = - \text{Div } \Phi_1,$$

die wir nach dem unter d) Folgenden auch $\square U = - \text{Div } \Phi_1$ schreiben und nach der Methode des folgenden Paragraphen integrieren können.

Eine ähnliche Überlegung wie die zu (25a) führende schließen wir an die erste Form des Gauss-Stokesschen

Satzes, Gleichung (24), an. Handelt es sich nämlich um ein *geschlossenes* dreifach ausgedehntes Raumgebiet S , wie sich dasselbe als Grenze eines vierdimensionalen Raumstückes Σ ergibt, so verschwindet seine Berandungsfläche und daher auch die rechte Seite von (24) und wir erhalten

$$\int_S \text{Div } f_s dS = 0,$$

gültig für jedes geschlossene Raumgebiet S . Tragen wir daher in den Gauss'schen Satz (23) $\text{Div } f$ für P ein, so wird die rechte Seite auch dieser Gleichung Null (hier war n die Normale auf dem Raumelement dS , die in der vorigen Gleichung mit s bezeichnet war) und wir haben

$$\int_{\Sigma} \text{Div } \text{Div } f d\Sigma = 0.$$

Da diese Gleichung für jedes beliebige Gebiet Σ gilt, schließen wir auf die identische Beziehung

$$(24b) \quad \text{Div } \text{Div } f = 0;$$

„die skalare Divergenz der Vektordivergenz eines beliebigen Sechservektors verschwindet“. Dies kann auch leicht an den Koordinatenausdrücken der skalaren und Vektordivergenz (Gleichung (16a) und (17a)) verifiziert werden.

Bedeutet im besonderen f wieder den Sechservektor des Feldes, so daß wegen der ersten Maxwell'schen Gleichung $\text{Div } f = P$ wird, so spricht (24b) die Kontinuitätsbedingung $\text{Div } P = 0$ aus, von der in § 5 unter a) die Rede war.

d) *Der Greensche Satz*. Wir benutzen ein schon von Cauchy eingeführtes und von Poincaré¹⁾ wieder aufgenommenes Symbol, das auf eine skalare Funktion U anzuwenden ist:

$$(26) \quad \square U = \text{Div Grad } U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

Dasselbe erweitert den üblichen Laplaceschen Differentialausdruck Δ auf vier Dimensionen und möge daher ebenfalls als *Laplacescher Ausdruck* bezeichnet werden. Seine geo-

1) H. Poincaré, Rendiconti Circolo Matematico di Palermo 21: 1906.

metrisch-invariante Natur folgt direkt aus der Darstellung
 $\square = \text{Div Grad}$.

Sind jetzt U und V zwei skalare Ortsfunktionen der vier Variablen $x y z l$, so haben wir in

$$P = U \text{Grad } V - V \text{Grad } U$$

einen Vierervektor von spezieller Bauart. Seine skalare Divergenz, die man sich hier durch Differentiation nach den Koordinaten $x y z l$ gebildet denken möge, wird dann:

$$\text{Div } P = U \square V - V \square U;$$

es heben sich nämlich dabei die zwei skalaren Produkte $\pm (\text{Grad } U, \text{Grad } V)$ gegenseitig fort. Tragen wir also diesen speziellen Vierervektor in den Gauss'schen Satz (23) ein, so ergibt sich

$$(27) \quad \int_{\Sigma} (U \square V - V \square U) d\Sigma = \int_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS,$$

d. i. das genaue Analogon des gewöhnlichen *Greenschen Satzes*. Er bezieht sich auf ein beliebiges Weltstück Σ und seine dreidimensionale Begrenzung S . Stetigkeit der auftretenden Funktionen und ihrer ersten Ableitungen wird hier ebenso wie bei den anderen Sätzen dieses Paragraphen vorausgesetzt. Ist diese in einem Weltpunkte verletzt, so hat man denselben durch einen dreidimensionalen Begrenzungsraum S_0 , ebenso wie im gewöhnlichen Falle, von der Integration auszuschließen und das Integral über S_0 der rechten Seite von (27) hinzuzufügen.

Dies tritt insbesondere dann ein, wenn wir V gleich dem vierdimensionalen Analogon des Newtonschen Potentials $1/r$ setzen:

$$(27a) \quad V = \frac{1}{R^2}, \quad R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + (l - l_0)^2,$$

dem Umstande entsprechend, daß in vier Dimensionen das mathematische Analogon zur Newtonschen Kraft mit dem Kubus statt mit dem Quadrat der Entfernung abnehmen würde. R bedeutet dabei den vierdimensionalen Abstand von dem festen Weltpunkte O („Aufpunkt“) $x_0 y_0 z_0 l_0$ nach dem variablen Integrationspunkt $x y z l$. Der Aufpunkt liege im Inte-

grationsgebiet und möge daher mit einem unendlich kleinen Kugelraum S_0 (Radius R_0) umgeben werden. Berechnen wir für diesen die rechte Seite von (27), so wird:

$$V = \frac{1}{R_0^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{2}{R_0^3} \frac{\partial R}{\partial n} = +\frac{2}{R_0^3},$$

$$\int U \frac{\partial V}{\partial n} dS_0 = U_0 \cdot \frac{2}{R_0^3} \int dS_0 = 4\pi^2 U_0, \quad \int V \frac{\partial U}{\partial n} dS_0 = 0.$$

Hier bedeutet U_0 den Wert von U im Aufpunkte ($R=0$) und es ist von dem leicht zu beweisenden Satze¹⁾ Gebrauch gemacht, daß die dreidimensionale Begrenzung einer vierdimensionalen Kugel vom Radius 1 gleich $2\pi^2$, also derjenigen vom Radius R_0 gleich $2\pi^2 R_0^3 = \int dS_0$ ist. Aus (27) folgt daher

$$(27b) \quad 4\pi^2 U_0 = -\int \square \frac{U}{R^2} d\Sigma - \int \left(U \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS.$$

Andererseits ergibt sich aus (27) mit $V=1$

$$(27c) \quad \int \square U d\Sigma = \int \frac{\partial U}{\partial n} dS.$$

Erstreckt sich das Integrationsgebiet auf den ganzen unendlichen Raum Σ , so können wir S als unendlich große Kugel (Radius R_∞) wählen. Für diese gilt, ähnlich wie oben:

$$\int U \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R^2} dS = -\frac{2}{R_\infty^3} \int U dS = -4\pi^2 U_m,$$

wo U_m den Mittelwert von U auf der unendlich fernen Kugel bedeutet, und wegen (27c)

$$\int \frac{1}{R^2} \frac{\partial U}{\partial n} dS = \frac{1}{R_\infty^2} \int \square U d\Sigma.$$

Trägt man beides in (27b) ein, so ergibt sich

$$4\pi^2 (U_0 - U_m) = -\int \square U \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_\infty^2} \right) d\Sigma.$$

1) Allgemein wird im Raum von ν Dimensionen der Begrenzungsraum der Einheitskugel $\frac{2\pi^{\nu/2}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})}$, also bei vier bzw. drei Dimensionen

$$\frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = 2\pi^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{2\pi^{3/2}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{3}{2})} = 4\pi.$$

Vgl. etwa Schoute, Mehrdimensionale Geometrie (Sammlung Schubert bei Götschen) Nr. 95.

Da $1/R_\infty$ verschwindet neben $1/R$, so wird also

$$(27d) \quad 4\pi^2 U_0 = - \int \frac{\square U}{R^2} d\Sigma + \text{Const.}$$

Hiernach ist U für einen beliebigen Weltpunkt O bis auf eine Konstante zu berechnen, wenn $\square U$ im ganzen Gebiete der reellen $x y z l$ gegeben ist.

Hierzu ist aber noch eine Bemerkung zu machen, welche die Realitätsverhältnisse betrifft. Wir haben wie immer stillschweigend die Koordinaten l_0, l ebenso wie $x_0, x \dots$ als reell vorausgesetzt und z. B. angenommen, daß R nur in dem einen Punkte O verschwindet. Das trifft nicht mehr zu, wenn man berücksichtigt, daß $(l - l_0)^2 = -c^2(t - t_0)^2$, vielmehr wird R in den reellen Weltkoordinaten auf einem dreifach ausgedehnten Kegel zu Null. Ferner wird bei den wirklichen Aufgaben $\square U$ nicht für reelle, sondern für negativ-imaginäre Werte von $l - l_0$ gegeben sein, nämlich in dem Bezugssystem der $x y z l$ für alle der Zeitkoordinate t_0 des Aufpunktes vorangehende Zeiten $t < t_0$. Man müßte also,

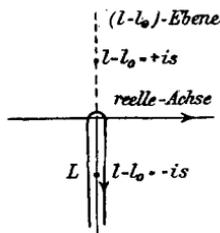


Fig. 3.

um unsere Formeln anwenden zu können, die gegebenen Werte $\square U$ von der negativ-imaginären Achse einer komplexen $(l - l_0)$ -Ebene (vgl. Fig. 3) sich nach der reellen Achse dieser Ebene analytisch fortgesetzt denken, und die Integration über diese reellen Werte von $l - l_0$, d. h. über die entsprechenden komplexen Werte von l erstrecken, in welchem Falle R^2 nur für $l = l_0$ verschwindet, wenn gleichzeitig $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ ist. Statt dessen werden wir einfacher so verfahren, daß wir den Integrationsweg wie in Fig. 3 in eine die negativ-imaginäre Achse¹⁾ umgebende Schleife deformieren; die Integration in (27d) ist dann so aufzufassen, daß sie nach $x y z$ über alle reellen Werte, nach l über diese Schleife zu führen ist, und es stellt (27d) den Wert von U

1) In dem Übergang zur negativ-, nicht zur positiv-imaginären Achse liegt die Bevorzugung der von ihrer Quelle aus divergierend fortschreitenden Wellen vor den physikalisch sinnlosen, aber mathematisch gleichberechtigten konvergierenden Wellen.

zur Zeit t_0 dar, wenn für alle früheren Zeitpunkte der Wert von $\square U$ gegeben ist. Die vierdimensionale Methode erweist sich also auch für diese und ähnliche Integrationsaufgaben als fruchtbar und gestattet sie ganz ähnlich zu lösen, wie in der gewöhnlichen Potentialtheorie das Potential gegebener Massen berechnet wird.

§ 7. Bestimmung des Viererpotentials und der elektrodynamischen Kraft.

Die Differentialgleichung des Viererpotentials, die wir als einfachste Formulierung der Maxwell'schen Theorie bezeichnen, lautet:

$$(25b) \quad \text{Div Rot } \Phi = P.$$

Für eine der vier rechtwinkligen Komponenten Φ_j von Φ haben wir daher nach (17 a) und (21 b):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi_z}{\partial j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi_t}{\partial j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} \right) = -\square \Phi_j + \frac{\partial}{\partial j} \text{Div } \Phi = P_j, \end{aligned}$$

wofür wir nach der Nebenbedingung (25 c) einfacher schreiben können¹⁾:

$$(28) \quad \square \Phi = -P.$$

Wir haben also das folgende Problem der vierdimensionalen Potentialtheorie zu lösen: Gesucht eine Lösung der Gleichung $\square \Phi = -P$ für einen beliebigen Raumzeitpunkt $x_0 y_0 z_0 t_0$, wenn die Viererdichte P , d. h. Ladung und Geschwindigkeit des betrachteten Systems, für alle früheren Zeitpunkte $t < t_0$ gegeben ist. Die Lösung enthält Gleichung (27 d) mit dem in Fig. 3 bezeichneten Schleifenwege.

Trägt man hier für U irgend eine der Komponenten von Φ ein, berücksichtigt Gleichung (28) und unterdrückt die für unser Potential belanglose Konstante, so ergibt sich

$$(29) \quad 4 \pi^2 \Phi_0 = \int \frac{P}{R^2} d\Sigma.$$

1) Diese Gleichung und die Zusammenfassung von skalarem und Vektorpotential zu einem „Weltvektor“ Φ bereits bei M. Born, Ann. d. Phys. 28. p. 571. 1909.

Diese im Sinne der Relativtheorie naturgemäßeste Darstellung des elektrodynamischen Potentials rührt von Herglotz¹⁾ her. Sachlich kann sich diese Darstellung natürlich von den älteren Formeln nicht unterscheiden, solange man in dem ursprünglichen und zufällig zugrunde gelegten Bezugssystem der $xyz t$ bleibt.

Die Integration nach l läßt sich in (29) sowie in allen analogen späteren Formeln stets nach dem Cauchyschen Residuensatze ausführen. Innerhalb der Schleife der Fig. 3 liegt nämlich eine Stelle, an der R^2 von der 1. Ordnung verschwindet, auf die also die Integration zusammengezogen werden kann, nämlich die Stelle (vgl. (27 a)):

$$(29 a) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = l_0 - i s, \quad t = t_0 - \frac{s}{c}, \\ s = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \end{array} \right.$$

Dagegen liegt die an sich gleichberechtigte Stelle $l = l_0 + i s$ auf der positiv-imaginären Achse der Fig. 3 und liefert keinen Beitrag zu unserer Schleifenintegration.

Unter Zugrundelegung der Weltlinie eines bestimmten Ladungselementes de (vgl. Fig. 4) bezeichnen wir denjenigen Punkt L der Weltlinie, der von einem im Punkte O konstruierten Kegel $R^2 = 0$ ausgeschnitten wird, mit Minkowski als *Lichtpunkt* von O . Seine Koordinaten sind eindeutig bestimmt, wenn sich das Ladungselement niemals mit Überlichtgeschwindigkeit bewegt, und es bestimmt sich die vierte Koordinate desselben, wie soeben

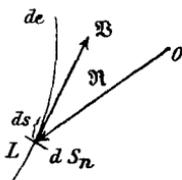


Fig. 4.

gezeigt, durch die Gleichung $t = t_0 - s/c$. Diese sagt bekanntlich aus, daß ein vom Weltpunkte L ausgehendes Lichtsignal den Weltpunkt O erreicht (d. h. den Raumpunkt $x_0 y_0 z_0$ zur Zeit t_0 erreicht).

1) G. Herglotz, Göttinger Nachrichten 1904. Heft 6. Diese kurze Note ist historisch besonders interessant, weil sie vor der Relativtheorie datiert. Trotzdem ist darin, wie auch Minkowski gesprächsweise hervorhob, die vierdimensionale Symmetrie der Elektrodynamik latent enthalten und mathematisch verwertet.

Führen wir also die Integration nach l mittels Residuenbildung aus, so werden sich die entstehenden Formeln auf den Lichtpunkt L von O beziehen. Z. B. entstehen so aus (29) direkt die wohlbekanntenen Formeln der retardierten Potentiale. Wir führen dies nur für den Fall einer punktförmigen Ladung (eines hinreichend entfernten Aufpunktes) aus.

In diesem Falle kann man in (29) R^3 bei der Integration nach xyz als konstant ansehen und diese Integration auswerten. Um aber von vornherein die Einführung des willkürlichen Bezugssystems xyz zu vermeiden, benutzen wir lieber ein nach der Weltlinie der Punktladung orientiertes naturgemäßes Bezugssystem. Es sei (vgl. Fig. 4) dS_n das Element des Normalraumes zur Weltlinie, ds das Bogenelement der Weltlinie. Dieses hängt mit der Minkowskischen Eigenzeit τ so zusammen, daß

$$(29b) \quad \begin{cases} ds = ic d\tau, \text{ indem} \\ ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 + dl^2} \\ d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right)}. \end{cases}$$

Nun hat man:

$$(29c) \quad \begin{cases} d\Sigma = dS_n ds = ic dS_n d\tau, \\ ic \int P dS_n = ie \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{B} = \left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, \frac{dl}{d\tau} \right). \end{cases}$$

Die erste dieser Formeln folgt unmittelbar daraus, daß das Längenelement ds und das dreidimensionale Raumelement dS_n zueinander normal sind. In der zweiten Formel bedeutet P ebenso wie \mathfrak{B} einen Vierervektor, der nach der Weltlinie der Ladung an der betrachteten Stelle gerichtet ist. Es ist also nur noch nachzuweisen, daß die Vektoren auf der rechten und linken Seite dieser Formel einander der Größe nach gleich sind. Mit Rücksicht auf (29b) wird $|\mathfrak{B}| = ic$, also die Größe der fraglichen rechten Seite gleich $-ce$. Auf der linken Seite denke man sich P in Komponenten nach der Weltlinie und senkrecht dazu zerlegt. Die letzteren verschwinden, die erstere wird nach Gleichung (1), Teil I gleich $i\varrho_0$, wo ϱ_0 die „Ruhdichte“, d. h. die von einem mitbewegten Beobachter beurteilte Dichte der Ladung bezeichnet. Dementsprechend wird

$\int \rho_0 dS_n = e$ gleich der Gesamtladung. Für die Größe der linken Seite von (29c) hat man also ebenfalls:

$$ic \int i \rho_0 dS_n = -ce.$$

Setzt man aus (29c) in (29) ein, so folgt:

$$4\pi^2 \Phi = ie \int \frac{\mathfrak{B}}{R^2} d\tau;$$

die Integration nach der neuen Variablen τ ist ganz ebenso wie die nach l in Fig. 3 auf einem beliebigen komplexen Umgang um den Lichtpunkt L im Uhrzeigersinne zu erstrecken und liefert, nach dem Cauchyschen Satze berechnet¹⁾:

$$(29d) \quad 4\pi \Phi_0 = \frac{e \mathfrak{B}}{(\Re \mathfrak{B})}.$$

Hier bedeutet

$$(29e) \quad \Re = (x-x_0, \quad y-y_0, \quad z-z_0, \quad l-l_0)$$

den Vierervektor vom Aufpunkte nach dem zugehörigen Lichtpunkt der Ladung, \mathfrak{B} den in (29c) definierten Geschwindigkeitsvektor der Ladung im Lichtpunkt und $(\Re \mathfrak{B})$ ihr skalares Produkt im Sinne von § 3 A. Gleichung (29d) stellt die im Sinne der Relativtheorie invariante Schreibweise des Punktpotentialgesetzes (Liénard-Wiechert) dar; wir kommen hierauf im folgenden Paragraphen nochmals zurück.

Das Feld einer beliebig bewegten Ladung im Aufpunkte O erhält man jetzt nach der Formel (21b)

$$f = \text{Rot } \Phi, \quad \text{z. B. } f_{xy} = \frac{\partial \Phi_y}{\partial x_0} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial y_0}.$$

Wollte man für den Fall einer Punktladung diese Differentiation an der ausgerechneten Formel (29d) vornehmen, so würde man auf umständliche Betrachtungen²⁾ geführt, die

1) Im Lichtpunkte selbst ist $R^2=0$, in der Umgebung desselben also

$$R^2 = r \frac{\partial (R^2)}{\partial \tau} = 2r \left\{ (x-x_0) \frac{\partial x}{\partial \tau} + \dots + (l-l_0) \frac{\partial l}{\partial \tau} \right\} = 2r (\Re \mathfrak{B})$$

mit der in (29e) erklärten Bedeutung von \Re . Das fragliche Integral wird daher

$$\int \frac{\mathfrak{B}}{R^2} d\tau = \frac{\mathfrak{B}}{2(\Re \mathfrak{B})} \int \frac{d\tau}{r} = -\frac{\pi i \mathfrak{B}}{(\Re \mathfrak{B})}.$$

2) Vgl. z. B. M. Abraham, Theorie der Elektrizität II. p. 13.

daher rühren, daß mit einer Variation von O zugleich eine solche des Lichtpunktes L verbunden ist. Viel einfacher ist es, auf die ursprüngliche Formel (29) zurückzugehen und den Übergang zur Punktladung erst zum Schlusse zu machen. Aus (29) ergibt sich

$$4 \pi^2 f_{xy} = 2 \int \frac{P_y(x-x_0) - P_x(y-y_0)}{R^4} d\Sigma$$

und etwas allgemeiner für $j = x, y, z, t$;

$$(30) \quad 2 \pi^2 f_{xj} = \int \frac{P_j(x-x_0) - P_x(j-j_0)}{R^4} d\Sigma.$$

Gehen wir sogleich zu der spezifischen elektrodynamischen Kraft \mathfrak{F} über, indem wir uns in der Umgebung des Aufpunktes O eine Ladungsverteilung von der Viererdichte P_0 denken, so bestimmt sich deren x -Komponente nach Gleichung (11) zu $(P_0 f_x)$; hierfür erhält man nach der letzten Formel bei Benutzung des in (29e) erklärten Vektors \mathfrak{R} , der sich zunächst noch nicht auf den Lichtpunkt bezieht:

$$2 \pi^2 \mathfrak{F}_x = 2 \pi^2 (P_0 f_x) = \int \frac{(P_0 P)(x-x_0) - P_x(P_0 \mathfrak{R})}{R^4} d\Sigma,$$

und daher allgemein:

$$(30a) \quad 2 \pi^2 \mathfrak{F} = \int \frac{(P_0 P) \mathfrak{R} - P(P_0 \mathfrak{R})}{R^4} d\Sigma.$$

Geht man jetzt wieder zu einer Punktladung e mittels der Gleichungen (29c) über, so ergibt sich deren spezifische Kraftwirkung auf die Verteilung P_0 :

$$2 \pi^2 \mathfrak{F} = i e \int \frac{(P_0 \mathfrak{B}) \mathfrak{R} - \mathfrak{B}(P_0 \mathfrak{R})}{R^4} d\tau.$$

Ist auch die Verteilung P_0 punktförmig von der Gesamtladung e_0 , so kann man die Gesamtkraft \mathfrak{R} bilden, die e auf e_0 ausübt. Dieselbe werde als mitbewegte Kraft im Sinne von \mathfrak{R}' in Gleichung (15) berechnet. Man multipliziere also mit dem zur Weltlinie von O normalen Raumelement dS' und bilde $\mathfrak{R} = \int \mathfrak{F} dS'$. Mit Rücksicht auf die zweite Zeile von (29c) ergibt sich, wenn \mathfrak{B}_0 den Geschwindigkeitsvektor von O bedeutet:

$$(30b) \quad 2 \pi^2 \mathfrak{R} = \frac{i e e_0}{c} \int \frac{(\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B}) \mathfrak{R} - (\mathfrak{B}_0 \mathfrak{R}) \mathfrak{B}}{R^4} d\tau.$$

Die Integration meint auch hier einen Umgang der komplexen Variablen τ in der Uhrzeigerrichtung um den Lichtpunkt von O ;

sie kann durch Residuenbildung unmittelbar ausgeführt werden, wobei jetzt, da der Nenner von der zweiten Ordnung in R^2 verschwindet, die Entwicklung des Zählers und Nenners bis zu Gliedern zweiter Ordnung zu nehmen ist. Die an sich selbstverständliche Rechnung unterdrücken wir hier und verweisen wegen ihres Ergebnisses auf Gleichung (37) des nächsten Paragraphen, wo dasselbe auf einem vielleicht anschaulicheren aber im Grunde weniger einfachen Wege wie hier abgeleitet wird. Verglichen mit der etwas zusammengesetzten Form der Gleichung (37) ist die in Gleichung (30b) enthaltene Integraldarstellung wegen ihrer besonderen Übersichtlichkeit jedenfalls bemerkenswert.

§ 8. Die zyklische oder Hyperbelbewegung und die elektrodynamischen Elementargesetze.

Als einfachstes Beispiel einer beschleunigten Bewegung betrachten wir den von M. Born¹⁾ kürzlich behandelten interessanten Fall der „Hyperbelbewegung“. Dieselbe stellt sich, wenn man in Ausdruck und Zeichnung wieder von dem imaginären Charakter der Zeitkoordinate absieht, als „zyklische Bewegung“ dar, worin der Grund ihrer Einfachheit liegt. Wir untersuchen diese Bewegung hier namentlich unter dem schon von Minkowski angedeuteten Gesichtspunkte²⁾, daß sich eine beliebig beschleunigte Bewegung immer durch diese „gleichförmig beschleunigte“ Bewegung approximieren läßt und gelangen von da aus zu einer anschaulichen Ableitung der elektrodynamischen Elementargesetze.

Das elektrische System bewege sich so, daß für jedes Ladungselement desselben gilt:

$$(31) \quad x = r \cos \varphi, \quad y = y, \quad z = z, \quad l = r \sin \varphi.$$

Bei konstantem r, y, z und variablem φ geben diese Gleichungen die Weltlinie des Ladungselementes; bei konstantem φ und variablem r, y, z bestimmen sie die „Ruhgestalt“ der Ladung,

1) M. Born, Ann. d. Phys. 30. p. 1. 1909; dem obigen Gesichtspunkt entsprechend kommt für uns nur Kapitel II dieser Abhandlung in Betracht, deren Ergebnisse wir durch freiere Benutzung der vierdimensionalen Vorstellungen etwas vereinfachen werden.

2) Vgl. H. Minkowski, Raum und Zeit § III und V.

Achsen x' und ct' einführen können, deren erstere durch O geht und deren letztere mit der Hyperbelasymptoten denselben Winkel bildet wie x' (harmonische Lage der Achsen x', ct' gegen die beiden Asymptoten). Auch auf diese neuen Achsen bezogen sind die Weltlinien gleichseitige Hyperbeln und stehen (nicht euklidisch) senkrecht auf ihnen. Zugleich wird jetzt für den Aufpunkt $ct'_0 = 0$, also auch $r_0 \sin i\psi_0 = 0$ oder $\psi_0 = 0$. Wenn wir also in Fig. 5a $\varphi_0 = 0$ wählten, so bedeutet dieses im Reellen, daß wir statt des ursprünglichen Bezugssystems der x, y, z, ct ein neues gestrichenes x', y, z, ct' einführen, das gegen das ursprüngliche relativ bewegt ist, und daß wir von diesem aus durch die Gleichung (31) unsere Polarkoordinaten $r y z \varphi$ definieren. Die Einführung der gestrichenen Achsen ist allerdings, bei Ausschluß von Überlichtgeschwindigkeit, nur möglich, wenn der Aufpunkt in einem der beiden raumartigen Quadranten der Fig. 5b liegt (vgl. die Anmerkung in Teil I, p. 752), d. h. wenn in den ursprünglichen Koordinaten gilt $ct_0 < x_0$, was wir voraussetzen wollen. Im anderen Falle, d. h. wenn der Aufpunkt in einem der zeitartigen Quadranten liegt, braucht man nur die Achsen x' und ct' zu vertauschen, ohne sonst etwas Wesentliches zu ändern.

Auch die Vektoren P und Φ zerlegen wir in Komponenten nach den Koordinaten $r y z \varphi$, wobei der Vierervektor P in den sukzessiven Lagen der Ladungselemente, der Vierervektor Φ im Aufpunkte anzutragen ist.

Offenbar ist

$$P_r = P_y = P_z = 0, \quad P = P_\varphi = i\rho_0.$$

Der Vektor P weist nämlich in Richtung der Weltlinie, also in Richtung des wachsenden φ ; ebenso wie $i\rho$ die vierte Komponente im xyz -System war (vgl. Gleichung (1), $\rho =$ Ladungsdichte im xyz -Raum) wird wegen des Vektorcharakters von P die vierte Komponente im $r y z \varphi$ -System gleich $i\rho_0$ ($\rho_0 =$ Ladungsdichte im mitbewegten $r y z$ -Raum = „Ruhdichte“ = $|P| = i\rho \sqrt{1 - \beta^2} = i\rho / \cos \varphi$, vgl. Gleichung (1a) und die Erläuterungen zur Gleichung (29c) des vorigen Paragraphen). Dabei ist ρ_0 nach dem Gauss'schen Satz längs jeder Weltlinie konstant (unabhängig von φ), von Weltlinie zu Weltlinie eventuell veränderlich. Wegen der sogleich vorzunehmenden Vektor-

summation werden wir auch die Komponenten P_x und P_l nach den durch O orientierten Achsen der Fig. 5a (den Achsen x', ct' der Fig. 5b) brauchen. Es ist für jede Stelle der Weltlinie:

$$(31a) \quad \begin{cases} P_x = -P_\varphi \cdot \sin \varphi = -i \varrho_0 \sin \varphi, \\ P_l = P_\varphi \cos \varphi = i \varrho_0 \cos \varphi. \end{cases}$$

Zur Berechnung von Φ benutzen wir Gleichung (29) und substituieren für die dortigen Integrationsvariablen $x = r \cos \varphi$, $l = r \sin \varphi$. Der die imaginäre Achse umgebenden Schleife in Fig. 3 entspricht jetzt eine Integration in φ über eine entsprechende Schleife, auf der φ von $-i\infty$ über Null nach $-i\infty$ zurückgeht und die wie früher den zu jeder Weltlinie gehörigen Lichtpunkt ($R^2 = 0$) im Uhrzeigersinne umschlingt. Der Übergang zu den neuen Integrationsvariablen r, φ geschieht nach dem Schema der gewöhnlichen Polarkoordinaten:

$$(31b) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int dl = \int_0^\infty r dr \int d\varphi,$$

mit dem Unterschiede, daß die Integration nach φ ähnlich wie nach l über die genannte Schleife sich erstreckt.

Von den vier Komponenten von Φ verschwinden zwei; es ist nämlich wegen $P_y = P_z = 0$

$$\Phi_y = 0, \quad \Phi_z = 0.$$

Von den beiden anderen Komponenten Φ_r und Φ_φ läßt sich zunächst aussagen, daß sie von der φ -Koordinate des Aufpunktes unabhängig sind, worin sich die zyklische Natur unseres Problems ausspricht. Wir konnten ja bei beliebiger Lage des Aufpunktes die nach diesem gezogene Richtung als Nullstrahl wählen; in die Ausdrücke von Φ_r (in Richtung dieses Nullstrahles) und von Φ_φ (senkrecht dazu) geht dann φ_0 überhaupt nicht mehr ein. Diese Komponenten werden also für alle Punkte irgend eines Kreises der Fig. 5a (irgend einer Hyperbel der Fig. 5b) konstant und der Vektor Φ hat eine konstante Größe und Lage gegen den veränderlichen Radius r_0 . Dagegen sind die Komponenten Φ_x, Φ_l in einem xl -System von allgemeiner Lage

natürlich von φ_0 abhängig und zwar vermöge der allgemeinen Formeln für Vektortransformation:

$$\Phi_x = \Phi_r \cos \varphi_0 - \Phi_\varphi \sin \varphi_0,$$

$$\Phi_t = \Phi_r \sin \varphi_0 + \Phi_\varphi \cos \varphi_0.$$

Bei der besonderen Lage der x -Achse wie in Fig. 5a (der x' -Achse wie in Fig. 5b), die für das Folgende bequem ist, wird wegen $\varphi_0 = 0$ übrigens $\Phi_r = \Phi_x$, $\Phi_\varphi = \Phi_t$.

Die Komponente $\Phi_r = \Phi_x$ läßt sich leicht ausführen. Zunächst ist wegen (31 a, b) und (29):

$$(32) \quad \begin{cases} 4 \pi^2 \Phi_x = -i \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^\infty r dr \int d\varphi \frac{\varrho_0 \sin \varphi}{R^2}, \\ R^2 = r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos \varphi + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2. \end{cases}$$

Da ϱ_0 von φ unabhängig (vgl. oben) und $d(R^2) = 2 r r_0 \sin \varphi d\varphi$ ist, so lautet das Integral nach φ einfach:

$$\frac{\varrho_0}{2 r r_0} \int \frac{d(R^2)}{R^2} = -\frac{2 \pi i \varrho_0}{2 r r_0},$$

da es um den Punkt $R^2 = 0$ entgegen dem positiven Umlaufsinn zu erstrecken ist (vgl. Fig. 3). Daher nach (32)

$$(32a) \quad 4 \pi \Phi_x = 4 \pi \Phi_r = -\frac{1}{r_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^\infty dr \varrho_0 = \frac{-e}{r_0};$$

hier bedeutet e die Gesamtladung des Systems, die durch Integration der Ruhdichte ϱ_0 über die Ruhgestalt des Systems erhalten wird. Andererseits ist nach (31 a, b) und (30):

$$(32b) \quad 4 \pi^2 \Phi_t = +i \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^\infty r dr \int d\varphi \frac{\varrho_0 \cos \varphi}{R^2}.$$

Das Integral nach φ ergibt sich, ganz ähnlich wie oben, durch Residuenbildung zu:

$$\frac{\varrho_0}{2 r r_0} \int \frac{d(R^2)}{R^2} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{-2 \pi i \varrho_0}{2 r r_0} \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right)_L,$$

$r_0 \sin \varphi$ wird aber in der Figur durch die Strecke $ON = PL$ dargestellt und es ist PL die Projektion des Vektors \mathfrak{R} vom Aufpunkt nach dem Lichtpunkt auf den Bewegungsvektor \mathfrak{B} , also ¹⁾

$$(33a) \quad r_0 \sin \varphi = PL = |\mathfrak{R}| \cos(\mathfrak{R}, \mathfrak{B}) = \frac{(\mathfrak{R} \mathfrak{B})}{|\mathfrak{B}|},$$

vgl. Teil I, § 3 A. Unser Potential ist also nach Richtung und Größe dargestellt durch

$$(33b) \quad 4\pi\Phi = \frac{e\mathfrak{B}}{(\mathfrak{R}\mathfrak{B})} \cdot \cdot \cdot \begin{cases} \mathfrak{R} = x - x_0, y - y_0, z - z_0, l - l_0, \\ \mathfrak{B} = \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, \frac{dl}{d\tau}. \end{cases}$$

Der besondere Charakter der Hyperbelbewegung ist aus (33b) verschwunden, diese Darstellung gilt für jede Bewegung, die im Lichtpunkte unsere Hyperbelbewegung tangiert und wurde oben (vgl. (29d)) direkt aus der allgemeinen Darstellung (29) durch Übergang zu einer Punktladung und durch Residuenbildung entnommen. Wie die Verhältnisse im Reellen liegen, ist in Fig. 5b angedeutet: In der Projektion der x, ct -Ebene wird der Lichtpunkt L von einer durch O gelegten Parallelen zur Hyperbelasymptoten aus der Weltlinie ausgeschnitten und es ist die Resultierende aus den beiden reellen Komponenten Φ_r und Φ_φ/i parallel der Tangente \mathfrak{B} im Lichtpunkt.

Zur Berechnung des Feldes übergehend, haben wir nach (21b) $f = \text{Rot } \Phi$ zu bilden, wobei wir natürlich die erforderlichen Umgänge, über die das Linienintegral von Φ zu erstrecken ist, im Sinne unseres Polarkoordinatensystems wählen (vgl. Fig. 5a rechts oben). Während die ry, rz, yz -Komponenten von f verschwinden, da $\Phi_y = \Phi_z = 0$ und Φ_r von y und z unabhängig ist, ergibt²⁾ sich nach (21):

$$(34) \quad f_{r\varphi} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial r_0} \Phi_\varphi, \quad f_{y\varphi} = \frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial y_0}, \quad f_{z\varphi} = \frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial z_0}.$$

1) Es ist nach Definition des Lichtpunktes $|\mathfrak{R}| = R = 0$ und $\cos(\mathfrak{R}, \mathfrak{B}) = \infty$, daher $|\mathfrak{R}| \cos(\mathfrak{R}, \mathfrak{B})$ ein unbestimmter Ausdruck, dessen wahrer Wert nach § 3 A durch $(\mathfrak{R} \mathfrak{B})/|\mathfrak{B}|$ angegeben wird.

2) Man erhält, da $r dr d\varphi$ der Inhalt, $r d\varphi$ bzw. dr die Seiten des in Fig. 5a gezeichneten Umganges sind:

$$f_{r\varphi} r dr d\varphi = \frac{\partial}{\partial r} \{ \Phi_\varphi r d\varphi \} dr - \frac{\partial}{\partial \varphi} \{ \Phi_r dr \} d\varphi.$$

Dies ergibt den Ausdruck (34), da Φ_r von φ unabhängig ist.

Das Feld ist also ebenso wie Φ nur abhängig von den Koordinaten r_0, y_0, z_0 des Aufpunktes und daher auf den Kreisen der Fig. 5a (den Hyperbeln von 5b) konstant. Dagegen ist es natürlich auf den Geraden $x = \text{const.}$ variabel, indem jede solche Gerade bei veränderlichem ct in Fig. 5b immer von anderen Hyperbeln geschnitten wird. Während also das Feld in einem raumfesten Punkte zeitlich wechselt, ist es in einem mitgeführten Punkte konstant. Und zwar hat es in einem solchen Punkte durchweg den Charakter des elektrischen Feldes. Da nämlich die φ -Richtung zugleich die Richtung der Zeitachse im mitgeführten („gestrichenen“) System ist, haben wir im Anschluß an (2) zu schreiben:

$$(34a) \quad \begin{cases} f_{r\varphi} = -i\mathfrak{E}'_r, & f_{y\varphi} = -i\mathfrak{E}'_y, & f_{z\varphi} = -i\mathfrak{E}'_z, \\ f_{yz} = \mathfrak{H}'_z = 0, & f_{zr} = \mathfrak{H}'_y = 0, & f_{ry} = \mathfrak{H}'_x = 0. \end{cases}$$

Für einen im $xyzl$ -System ruhenden Beobachter dagegen hat das Feld außer dem elektrischen auch einen magnetischen Teil.

Für entfernte Aufpunkte, für die das elektrische System als punktförmig erscheint, ergibt sich aus (33) und (34)

$$4\pi f_{r\varphi} = \frac{e}{r_0} \frac{\partial}{\partial r_0} \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right)_L = \frac{-e}{r_0 \sin^2 \varphi_L} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r_0} \right)_L$$

und ebenso

$$4\pi f_{y\varphi} = \frac{-e}{r_0 \sin^2 \varphi_L} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \right)_L, \quad 4\pi f_{z\varphi} = \frac{-e}{r_0 \sin^2 \varphi_L} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_0} \right)_L.$$

Aus der Definition des Lichtpunktes:

$$R^2 = r^2 + r_0^2 - 2r r_0 \cos \varphi + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0$$

folgt aber, da bei der Hyperbelbewegung r, y, z konstant sind:

$$2(r_0 - r \cos \varphi) dr_0 + 2r r_0 \sin \varphi d\varphi = 0,$$

also

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r_0} = \frac{r \cos \varphi - r_0}{r r_0 \sin \varphi}$$

und ebenso

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = \frac{y - y_0}{r r_0 \sin \varphi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} = \frac{z - z_0}{r r_0 \sin \varphi};$$

daher, wenn der Index L bei φ unterdrückt wird:

$$(34b) \quad \begin{cases} 4\pi f_{r\varphi} = \frac{-e}{r r_0^2 \sin^3 \varphi} (r \cos \varphi - r_0), \\ 4\pi f_{y\varphi} = \frac{-e}{r r_0^2 \sin^3 \varphi} (y - y_0), \\ 4\pi f_{z\varphi} = \frac{-e}{r r_0^2 \sin^3 \varphi} (z - z_0). \end{cases}$$

Diese Formeln sind der einfachste Ausdruck für das von einer beliebig bewegten Punktladung erzeugte Feld. Indem man nämlich an die Weltlinie der Punktladung in dem zu unserem Aufpunkt gehörigen Lichtpunkt den Krümmungskreis (Krümmungshyperbel) legt und die beliebige Bewegung durch die zyklische Bewegung auf dem Krümmungskreis ersetzt, führt man den allgemeinen Fall auf unsere Formeln (34b) zurück. Charakteristisch ist dabei das Auftreten des Krümmungsradius r , der mit der Beschleunigung der Bewegung im Lichtpunkt zusammenhängt (vgl. unten). Der Unterschied zwischen longitudinaler und transversaler Beschleunigung ist dabei nur ein Unterschied in der Wahl des Bezugssystems.

Wir wollen zunächst die Formeln (34b) so umschreiben, daß darin nur die auf den Lichtpunkt bezogenen Vierervektoren

$$\mathfrak{R}, \mathfrak{B}, \mathfrak{Z}$$

auftreten: \mathfrak{R} der Vektor von O nach L , \mathfrak{B} der Geschwindigkeitsvektor in L (vgl. Gleichung (33a)) und \mathfrak{Z} der Beschleunigungsvektor in L . Bei der obigen Definition (Gleichung (29b)) von $d\tau$ durch das Weltlinienelement $d\tau = ds/ic$ wird, da in unseren zyklischen Koordinaten $ds = r d\varphi$ gilt, offenbar $d\tau = r d\varphi/ic$, also nach den Gleichungen (31)

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= (-r \sin \varphi, 0, 0, r \cos \varphi) \frac{d\varphi}{d\tau} \\ &= (-\sin \varphi, 0, 0, \cos \varphi) ic, \quad |\mathfrak{B}| = ic, \end{aligned}$$

dementsprechend folgt weiter:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z} &= \frac{d\mathfrak{B}}{d\tau} = (-\cos \varphi, 0, 0, -\sin \varphi) ic \frac{d\varphi}{d\tau} \\ &= (\cos \varphi, 0, 0, \sin \varphi) \frac{c^2}{r}, \quad |\mathfrak{Z}| = \frac{c^2}{r}. \end{aligned}$$

\mathfrak{Z} hat also im Lichtpunkt die Richtung des Radius ML und die Größe c^2/r .

Aus diesen drei Vektoren lassen sich die folgenden vom Bezugssystem unabhängigen Größen

$$(\mathfrak{R} \mathfrak{B}) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{R} \mathfrak{Z})$$

bilden, durch die sich also die Formeln (34b) ausdrücken lassen

müssen; wir bemerken dabei, daß die außerdem möglichen Invarianten nach obigem die folgenden einfachen Werte haben:

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{R} \mathfrak{R}) = R^2 = 0, \quad (\mathfrak{B} \mathfrak{B}) = |\mathfrak{B}|^2 = -c^2, \\ (\mathfrak{B} \mathfrak{B}) = |\mathfrak{B}|^2 = \frac{c^4}{r^2}, \quad (\mathfrak{B} \mathfrak{B}) = 0, \end{array} \right.$$

letzteres wegen der senkrechten Lage von \mathfrak{B} und \mathfrak{B} . Bezüglich des Wertes von $(\mathfrak{R} \mathfrak{B})$ ergab sich oben in Gleichung (33a):

$$(35a) \quad (\mathfrak{R} \mathfrak{B}) = |\mathfrak{B}| r_0 \sin \varphi = i c r_0 \sin \varphi.$$

Ähnlich ergibt sich nach Fig. 6 als Projektion von \mathfrak{R} auf \mathfrak{B}

$$|\mathfrak{R}| \cos(\mathfrak{R}, \mathfrak{B}) = \frac{(\mathfrak{R} \mathfrak{B})}{|\mathfrak{B}|} = N L = r - r_0 \cos \varphi,$$

also

$$(35b) \quad r_0 \cos \varphi = r \left(1 - \frac{(\mathfrak{R} \mathfrak{B})}{c^2} \right), \quad \frac{r_0}{r} \cos \varphi = \frac{c^2 - (\mathfrak{R} \mathfrak{B})}{c^2}$$

und durch Division von (35a) und (35b):

$$(35c) \quad \frac{\cos \varphi}{i c r \sin \varphi} = \frac{1}{c^2} \frac{c^2 - (\mathfrak{R} \mathfrak{B})}{(\mathfrak{R} \mathfrak{B})}.$$

Betrachten wir jetzt den aus dem Sechservektor f abgeleiteten Vierervektor f_φ (vgl. Teil I, Gleichung (6a)):

$$4 \pi f_\varphi = \frac{e}{r r_0^2 \sin^3 \varphi} (r \cos \varphi - r_0, y - y_0, z - z_0, 0)$$

Hier sind die drei Größen der Klammer bzw. die Komponenten von \mathfrak{R} nach den durch O gezogenen Richtungen r_0, y_0, z_0 , nämlich

$$\mathfrak{R}_r = OQ = r \cos \varphi - r_0, \quad \mathfrak{R}_y = y - y_0, \quad \mathfrak{R}_z = z - z_0;$$

fügen wir also die vierte Komponente nach der durch O gelegten, auf r_0 senkrechten Richtung des wachsenden φ_0 nämlich $\mathfrak{R}_\varphi = QL$ (vgl. Fig. 6) hinzu, so wird

$$(r \cos \varphi - r_0, y - y_0, z - z_0, 0) = \mathfrak{R} - \text{Vektor } QL.$$

Der Betrag von QL ist $r \sin \varphi$; der Einheitsvektor Φ_1 in dieser Richtung stellt sich durch die Einheitsvektoren in den Richtungen \mathfrak{B} und \mathfrak{B} , welche gegen jene bzw. um φ und $\pi/2 - \varphi$ geneigt sind, so dar:

$$(36) \quad \Phi_1 = \frac{\text{Vektor } QL}{|QL|} = \cos \varphi \frac{\mathfrak{B}}{|\mathfrak{B}|} + \sin \varphi \frac{\mathfrak{B}}{|\mathfrak{B}|},$$

also

$$\text{Vektor } Q L = r \sin \varphi \Phi_1 = r \sin \varphi \left(\frac{\cos \varphi}{i c} \mathfrak{B} + \frac{r \sin \varphi}{c^2} \mathfrak{B}' \right).$$

Daher zerlegt sich f_φ in zwei bzw. drei Vierervektoren der Richtungen \mathfrak{R} , Φ_1 bzw. \mathfrak{R} , \mathfrak{B} , \mathfrak{B}' , nämlich:

$$(36a) \quad \left\{ \begin{aligned} 4 \pi f_\varphi &= \frac{e}{r \sin \varphi r_0^2 \sin^2 \varphi} \mathfrak{R} - \frac{e}{r_0^2 \sin^2 \varphi} \Phi_1 \\ &= \frac{e}{r \sin \varphi r_0^2 \sin^2 \varphi} \mathfrak{R} - \frac{e}{r_0^2 \sin^2 \varphi} \left(\frac{\cos \varphi}{i c} \mathfrak{B} + \frac{r \sin \varphi}{c^2} \mathfrak{B}' \right). \end{aligned} \right.$$

Wir gehen jetzt zu der spezifischen elektrodynamischen Kraft \mathfrak{F} über (vgl. § 4), indem wir uns im Aufpunkte O eine Ladung denken, deren Größe und Bewegung durch den Vierervektor P_0 gegeben wird. Die Komponenten von \mathfrak{F} nach den Koordinatenrichtungen sind nach Gleichung (11)

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_r &= (P_0 f_r) = P_{0\varphi} f_{r\varphi}, \\ \mathfrak{F}_y &= (P_0 f_y) = P_{0\varphi} f_{y\varphi}, \\ \mathfrak{F}_z &= (P_0 f_z) = P_{0\varphi} f_{z\varphi}, \\ \mathfrak{F}_\varphi &= (P_0 f_\varphi) = P_{0r} f_{\varphi r} + P_{0y} f_{\varphi y} + P_{0z} f_{\varphi z}. \end{aligned}$$

Wir können also vektoriell schreiben, unter Φ_1 den genannten Einheitsvektor in der durch O hindurchgehenden φ -Richtung verstanden:

$$\mathfrak{F} = -(P_0 \Phi_1) f_\varphi + (P_0 f_\varphi) \Phi_1$$

oder mit Rücksicht auf (36a)

$$(36b) \quad 4 \pi \mathfrak{F} = \frac{e}{r \sin \varphi r_0^2 \sin^2 \varphi} \left(-(P_0 \Phi_1) \mathfrak{R} + (P_0 \mathfrak{R}) \Phi_1 \right).$$

Tragen wir jetzt für Φ_1 den Wert (36) ein, so zerlegt sich \mathfrak{F} in drei Teile, einen *Lagenbestandteil* von der Richtung \mathfrak{R} , einen *Geschwindigkeits-* und *Beschleunigungsbestandteil* von der Richtung \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' , nämlich bei Benutzung von (35a) und (35c):

$$(36c) \quad \left\{ \begin{aligned} 4 \pi \mathfrak{F}_{\mathfrak{R}} &= \frac{e}{(\mathfrak{R} \mathfrak{B})^2} \left(\frac{c^2 - (\mathfrak{R} \mathfrak{B}')}{(\mathfrak{R} \mathfrak{B})} (P_0 \mathfrak{B}) + (P_0 \mathfrak{B}') \right) \mathfrak{R}, \\ 4 \pi \mathfrak{F}_{\mathfrak{B}} &= \frac{-e}{(\mathfrak{R} \mathfrak{B})^2} \frac{c^2 - (\mathfrak{R} \mathfrak{B}')}{(\mathfrak{R} \mathfrak{B})} (P_0 \mathfrak{R}) \mathfrak{B}, \\ 4 \pi \mathfrak{F}_{\mathfrak{B}'} &= \frac{-e}{(\mathfrak{R} \mathfrak{B})^2} (P_0 \mathfrak{R}) \mathfrak{B}'. \end{aligned} \right.$$

Hiermit ist die allgemeine invariante Darstellung der spezifischen elektrodynamischen Kraft \mathfrak{F} gewonnen. Wir gehen von ihr zu der totalen Kraft \mathfrak{R} über, indem wir uns in O eine Gesamtladung e_0 punktförmig vorhanden denken. Wir werden dieselbe als „mitbewegte Kraft“ (im Sinne der Gleichung (15) für \mathfrak{R}') berechnen, indem wir diejenigen Werte von \mathfrak{F} betrachten, die einem an der Bewegung von O teilnehmenden Beobachter als gleichzeitig erscheinen, d. h. über einen Raum dS' integrieren, der senkrecht zur Weltlinie von O steht. Dagegen würde sich, wie in § 4 bemerkt, bei der Integration über dS ein vom Bezugssystem abhängiges Resultat ergeben. Da so nach dS dieselbe Bedeutung hat, wie in Gleichung (29c) dS_n , so ergibt sich aus dieser Gleichung

$$\int P_0 dS' = \frac{e_0}{c} \mathfrak{B}_0$$

und aus (36c) erhält man die folgenden drei Anteile der totalen elektrodynamischen Kraft:

$$(37) \quad \begin{cases} 4\pi \mathfrak{R}_{\mathfrak{R}} = \frac{e e_0}{c (\mathfrak{R} \mathfrak{B})^2} \left(\frac{c^2 - (\mathfrak{R} \mathfrak{B})}{(\mathfrak{R} \mathfrak{B})} (\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B}) + (\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B}') \right) \mathfrak{R}, \\ 4\pi \mathfrak{R}_{\mathfrak{B}} = \frac{-e e_0}{c (\mathfrak{R} \mathfrak{B})^2} \frac{c^2 - (\mathfrak{R} \mathfrak{B})}{(\mathfrak{R} \mathfrak{B})} (\mathfrak{B}_0 \mathfrak{R}) \mathfrak{B}, \\ 4\pi \mathfrak{R}_{\mathfrak{B}'} = \frac{-e e_0}{c (\mathfrak{R} \mathfrak{B})^2} (\mathfrak{B}_0 \mathfrak{R}) \mathfrak{B}. \end{cases}$$

Wie oben im Anschluß an (33a) kann man bemerken, daß der besondere Charakter der Hyperbelbewegung aus diesen Formeln verschwunden ist (die Hyperbelbewegung diente uns nur dazu, die Bewegung von e im Lichtpunkte bequem zu approximieren), und daß man allgemeiner dieselben Formeln erhält, wenn man \mathfrak{R} für eine ganz beliebige Bewegung von e berechnet. In der Tat sind die Gleichungen (37) identisch mit dem Resultat der Residuenbildung in Gleichung (30b), von dem p. 670 die Rede war.

Die Gleichungen (37) stimmen natürlich auch mit der geometrischen Regel überein, die Minkowski im § V von „Raum und Zeit“ gibt und unterscheiden sich von den ursprünglich von Schwarzschild gefundenen Ausdrücken nur durch Hinzufügung der vierten „energetischen Komponente“, die

für das Folgende übrigens nicht unwichtig ist, und in den drei übrigen „dynamischen“ Komponenten nur durch einen Faktor

$$\sqrt{1 - \beta_0^2}, \quad (\beta_0 c = \text{Geschwindigkeit von } O),$$

der daher rührt, daß Schwarzschild bei Bildung der Gesamtkraft über einen Raum dS , wir über einen Raum dS' integrieren.

§ 9. Bemerkungen zum Coulombschen und Newtonschen Gesetz.

A. *Coulombsches Gesetz.* Die Gleichungen (37) wenden wir auf den einfachsten Fall der Elektrostatik, zwei gegeneinander ruhende Punktladungen, an. Im Sinne der Relativtheorie ruhen zwei Ladungen, deren Weltlinien zwei parallele Geraden sind. In diesem Falle wird

$$\mathfrak{B} = 0, \quad (\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B} \mathfrak{B}) = -c^2, \quad (\mathfrak{B}_0 \mathfrak{R}) = (\mathfrak{B} \mathfrak{R})$$

und daher

$$(38) \quad 4\pi \mathfrak{R} = -e e_0 c \frac{c^2 \mathfrak{R} + (\mathfrak{R} \mathfrak{B}) \mathfrak{B}}{(\mathfrak{R} \mathfrak{B})^3}.$$

Nach Wegfall des Beschleunigungsbestandteiles setzt sich also die Kraft \mathfrak{R} in (38) aus einem nach dem Lichtpunkt gerichteten *Lagenbestandteil* und einem *Geschwindigkeitsbestandteil* zusammen, der sich zunächst auch auf den Lichtpunkt bezieht, aber wegen der vorausgesetzten Gleichförmigkeit zugleich die Richtung eines beliebigen Punktes der Weltlinie von e oder e_0 hat. Wir zeigen, daß dieser Geschwindigkeitsbestandteil den Lagen-

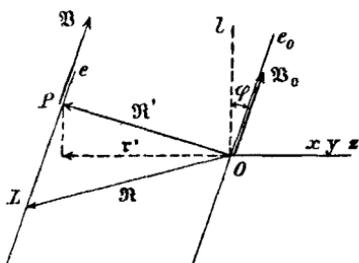


Fig. 7.

bestandteil gerade zu einem Vektor ergänzt, der nach dem mit O gleichzeitigen Punkte P auf der Weltlinie von e gerichtet ist. Die Gleichzeitigkeit ist dabei offenbar von dem mit der Geschwindigkeit \mathfrak{B} bewegten Bezugssystem aus zu beurteilen, dem einzigen in unserem Falle naturgemäß definierten Bezugssystem, und wird in Fig. 7 an-

deutungsweise wieder durch ein gewöhnliches (Euklidisches) Senkrechtstehen konstruiert.

Wie schon mehrfach benutzt (vgl. p. 676 und 679), ist die Projektion PL von \mathfrak{R} auf \mathfrak{B} gleich $(\mathfrak{R}\mathfrak{B})/|\mathfrak{B}|$ und der Einheitsvektor in Richtung von \mathfrak{B} gleich $\mathfrak{B}/|\mathfrak{B}|$, daher mit Rücksicht auf $|\mathfrak{B}| = ic$:

$$\text{Vektor } LP = - PL \cdot \frac{\mathfrak{B}}{|\mathfrak{B}|} = - \frac{(\mathfrak{R}\mathfrak{B})}{|\mathfrak{B}|^2} \mathfrak{B} = + \frac{1}{c^2} (\mathfrak{R}\mathfrak{B}) \mathfrak{B}.$$

Der Zähler in (38) wird folglich mit der in Fig. 7 eingetragenen Bedeutung von \mathfrak{R}' :

$$c^2(\text{Vektor } OL + \text{Vektor } LP) = c^2 \text{Vektor } OP = c^2 \mathfrak{R}'.$$

Wendet man auf das „rechtwinklige“ Dreieck OLP den Pythagoras an, so ergibt sich ferner mit $R' = |\mathfrak{R}'|$, $R = |\mathfrak{R}| = 0$:

$$R^2 = 0 = R'^2 + (PL)^2, \quad (PL)^2 = \frac{(\mathfrak{R}\mathfrak{B})^2}{|\mathfrak{B}|^2} = - R'^2$$

oder

$$(38a) \quad (\mathfrak{R}\mathfrak{B})^2 = - |\mathfrak{B}|^2 R'^2 = + c^2 R'^2.$$

Der Nenner in (38) wird daher gleich $c^3 R'^3$, so daß wir statt (38) schreiben können:

$$(39) \quad 4\pi \mathfrak{R} = - e e_0 \frac{\mathfrak{R}'}{R'^3}.$$

Dies ist der allgemeine invariante Ausdruck des Coulomb'schen Gesetzes.

Führen wir nun ein spezielles Bezugssystem $xyzl$ ein, dessen l -Achse mit \mathfrak{B} den Winkel φ bildet, in dem sich also e und e_0 bewegen. Die Koordinaten von P seien x', y', z', l' , diejenigen von O wie früher x_0, y_0, z_0, l_0 . Der dreidimensionale Vektor $x' - x_0, y' - y_0, z' - z_0$ heiße \mathfrak{r}' , r' sei seine Länge. Der dreidimensionale Kraftvektor $\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_z$ ist nach § 4 als der dynamische Bestandteil des Vierervektors \mathfrak{R} zu bezeichnen. Derselbe ist natürlich nicht nach dem im Sinne unseres zufälligen Bezugssystems mit O gleichzeitigen Punkte gerichtet, sondern nach demjenigen Raumpunkte, der aus dem Raumzeitpunkte P durch Projektion auf den xyz -Raum entsteht. Jener *dynamische Bestandteil* wird nämlich

$$4\pi(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_z) = - e e_0 \frac{\mathfrak{r}'}{R'^3};$$

seine Größe ist

$$(39a) \quad 4\pi\sqrt{\mathfrak{R}_x^2 + \mathfrak{R}_y^2 + \mathfrak{R}_z^2} = e e_0 \frac{r'}{R'^3}.$$

Sie ist also weder dem Quadrat von r' noch demjenigen von R' umgekehrt proportional. Um die einfache Aussage des Coulombschen Gesetzes aufrecht halten zu können, muß man vielmehr den *energetischen Bestandteil* mitbetrachten und die Größe des Vierervektors

$$|\mathfrak{R}| = \sqrt{\mathfrak{R}_x^2 + \mathfrak{R}_y^2 + \mathfrak{R}_z^2 + \mathfrak{R}_t^2}$$

bilden. Für diesen gilt einfach

$$(39b) \quad 4\pi |\mathfrak{R}| = \frac{ee_0}{R'^2},$$

also das Coulombsche Gesetz in dem Sinne, daß es auf den *vierdimensionalen* Abstand der beiden gleichzeitigen Weltpunkte O und P ankommt. Wir betonen dies zur Erhärtung der schon früher (§ 4, p. 771) gemachten Bemerkung, daß der energetischen Komponente der Kraft keineswegs nur eine formale Bedeutung zukommt. Vielmehr zeigt sie sich in unserem besonderen Falle unentbehrlich, um das Coulombsche Gesetz in seiner für statische Verhältnisse gültigen Einfachheit auch für bewegte Ladungen und unabhängig von der Wahl eines speziellen Bezugssystems aussprechen zu können.

Die energetische Komponente von \mathfrak{R} verschwindet natürlich, wenn man das Bezugssystem speziell als mitbewegtes einführt, so daß beide Ladungen in ihm ruhen. Dann wird $R' = r'$, so daß (39a) und (39b) identisch werden. Da im allgemeinen Falle $r'/R' = \cos \varphi$ ist (vgl. Fig. 7), kann man (39a) als Komponente des vollständigen Vektorbetrages (39b) ansehen.

B. *Newtonsches Gesetz*. Zu diesem habe ich nur eine literarische Bemerkung zu machen. Es gibt zwei Vorschläge zur Lösung der dringenden Aufgabe, das Gravitationsgesetz den Prinzipien der Relativtheorie anzupassen, von Poincaré (1906) und Minkowski (1908). Minkowski überträgt¹⁾ direkt das Abstoßungsgesetz zweier Elektronen mit Vorzeichenumkehr auf die Anziehung zweier ponderabler Massen; sein Vorschlag geht also dahin, in den Gleichungen (37) zu ersetzen ee_0 durch $-mm_0$, wo m_0 und m die angezogene bzw. anziehende Ruhmasse bedeuten. Wir wollen die Bewegung von m als gleichförmig

1) Raum und Zeit § V. Wegen der am Ende der „Grundgleichungen“ gegebenen Formulierung vgl. die Anm. 2) auf p. 686.

voraussetzen (die Beschleunigung \mathfrak{B} wird offenbar erst in zweiter Linie in Frage kommen, da bisher auch ein Einfluß von \mathfrak{B} selbst auf die Gravitation noch niemals nachgewiesen werden konnte). Dann vereinfacht sich der Minkowskische Vorschlag zu dem folgenden Ausdruck des Newtonschen Gesetzes ($\mathfrak{R}_{\mathfrak{B}} = 0$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{\mathfrak{R}} + \mathfrak{R}_{\mathfrak{B}}$), wenn wir noch den unwesentlichen Faktor 4π in \mathfrak{R} aufnehmen

$$(40) \quad \mathfrak{R} = -m m_0 c \frac{(\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B}) \mathfrak{R} - (\mathfrak{B}_0 \mathfrak{R}) \mathfrak{B}}{(\mathfrak{R} \mathfrak{B})^3}.$$

Poincaré¹⁾ andererseits stellt sich die Aufgabe, in allgemeinsten Weise dasjenige gegen Lorentztransformationen invariante Kraftgesetz zu bilden, das sich für kleine Geschwindigkeiten (Vernachlässigung von β^2 und β_0^2) auf das Newtonsche Gesetz im gewöhnlichen Sinne reduziert. Nur im Falle beide Geschwindigkeiten (wie unter A angenommen) gleich sind, ist die Form des relativistisch erweiterten Gravitationsgesetzes eindeutig bestimmt; sonst bleibt sie in gewissen Grenzen unbestimmt. Poincaré operiert hierbei bereits in ausgesprochener Weise mit Vierervektoren (die Einführung der Sechservektoren dagegen blieb Minkowski vorbehalten); dieselben werden durch ihre Komponenten nach einem willkürlichen xyz -System dargestellt. Und zwar gilt die folgende Zusammenstellung zwischen unseren Vektoren (links) und den Poincaréschen Komponenten (rechts):

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= (X_1, Y_1, Z_1, i T_1), \\ \mathfrak{R} &= (x, y, z, -i r), \\ \mathfrak{B}_0 &= (\xi, \eta, \zeta, i c) k_0, \\ \mathfrak{B} &= (\xi_1, \eta_1, \zeta_1, i c) k_1, \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_0^2} &= 1 - \frac{1}{c^2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 1 - \beta_0^2, \\ \frac{1}{k_1^2} &= 1 - \frac{1}{c^2} (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) = 1 - \beta^2. \end{aligned}$$

Ferner ist zu beachten, daß Poincaré $c = 1$ gesetzt und auch die anziehende und angezogene Masse $m = m' = 1$ ge-

1) In der p. 661 zitierten Arbeit aus den Rendiconti di Palermo 21. 1906.

nommen hat; um seine Formeln dimensionstreu zu schreiben, hat man daher seine Geschwindigkeitskomponenten ξ, ξ_1, \dots durch $\xi/c, \xi_1/c, \dots$ und seine Kraftkomponenten X_1, \dots durch $X_1/m', \dots$ zu ersetzen. Daraufhin schreiben sich die Poincaréschen Ausdrücke¹⁾ (11) p. 174 zunächst so:

$$(40a) \quad \frac{k_0 \mathfrak{R}}{m m'} = - \frac{1}{B^3 C} \left(C \mathfrak{R} - \frac{1}{c} A \mathfrak{B} \right).$$

Die erwähnte Unbestimmtheit des Problems bringt es mit sich, daß man, wie Poincaré selbst bemerkt (p. 175), den Faktor $1/B^3$ ersetzen kann durch C/B^3 , in welchem Falle sich statt des vorstehenden der folgende Ausdruck ergibt:

$$(40b) \quad \frac{k_0 \mathfrak{R}}{m m'} = - \frac{1}{B^3} \left(C \mathfrak{R} - \frac{1}{c} A \mathfrak{B} \right).$$

A, B, C bedeuten dabei die aus den Vektoren $\mathfrak{R}, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}$ zu bildenden Invarianten und sind bei Poincaré durch den zweiten bis vierten der Ausdrücke (5) von p. 169 gegeben, nämlich:

$$A = - \frac{1}{c} (\mathfrak{R} \mathfrak{B}_0), \quad B = - \frac{1}{c} (\mathfrak{R} \mathfrak{B}), \quad C = - \frac{1}{c^2} (\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B}).$$

Ersetzt man schließlich noch die in dem willkürlichen Bezugssystem gemessene Masse $m' = m_0 k_0$ durch die Ruhmasse m_0 , so ergibt sich aus (40a) bzw. (40b):

$$(40c) \quad \mathfrak{R} = m m_0 c^3 \frac{(\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B}) \mathfrak{R} - (\mathfrak{B}_0 \mathfrak{R}) \mathfrak{B}}{(\mathfrak{R} \mathfrak{B})^3 (\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B})}$$

bzw.

$$(40d) \quad \mathfrak{R} = - m m_0 c \frac{(\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B}) \mathfrak{R} - (\mathfrak{B}_0 \mathfrak{R}) \mathfrak{B}}{(\mathfrak{R} \mathfrak{B})^3}$$

Der letztere Ausdruck stimmt mit (40) genau, der erstere bis auf den Faktor $-c^2/(\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B})$ überein, der sich von der Einheit nur um Glieder zweiter Ordnung in den Geschwindigkeitsverhältnissen β, β_0 unterscheidet.²⁾ Wir kommen also zu dem

1) Mit Umkehr des bei Poincaré offenbar versehentlichen Vorzeichens.

2) Dieser Ausdruck (40c) andererseits stimmt genau überein mit derjenigen Form des Newtonschen Gesetzes, die Minkowski in den „Grundgleichungen“ angibt, falls man auch hier die Bewegung beschleunigungsfrei annimmt. Man erkennt dies direkt, wenn man die mit (40c) äquivalente geometrische Formulierung in (41b) vergleicht mit der geometrischen Regel (24) in den „Grundgleichungen“.

Ergebnis¹⁾: Die spezielle Minkowskische Formulierung des Newtonschen Gesetzes subsumiert sich, wenn man darin die Beschleunigung der anziehenden Masse gleich Null setzt, unter die naturgemäß bis zu einem gewissen Grade unbestimmte Poincarésche Formulierung; die letztere ist abgesehen von Gliedern höherer Ordnung nicht allgemeiner wie die erstere.

Das Verhältnis der Minkowskischen oder Poincaréschen zu der gewöhnlichen Fassung des Newtonschen Gesetzes wird am besten durch eine einfache Figur erläutert, die sich von Fig. 7 nur dadurch unterscheidet, daß die Richtungen \mathfrak{B}_0 und \mathfrak{B} der Weltlinie von m_0 und m jetzt nicht parallel sind, sondern den Winkel ψ einschließen. Dieser erscheint in Fig. 8²⁾ als Winkel zwischen QO (Richtung \mathfrak{B}_0) und QT (parallel \mathfrak{B}). P ist der mit O gleichzeitige Punkt im Sinne eines mit \mathfrak{B} bewegten Bezugssystems, S ist gleichzeitig mit O im Sinne von dessen Eigenbewegung \mathfrak{B}_0 .

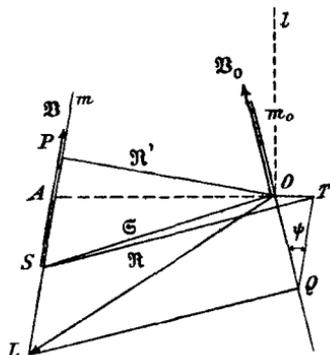


Fig. 8.

Wir konstruieren nun den Zähler der Ausdrücke (40), (40c) und (40d) folgendermaßen. Es ist nach § 3 A

$$(41) \quad (\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B}) = \cos \psi |\mathfrak{B}_0| |\mathfrak{B}| = -c^2 \cos \psi$$

1) Die letzte Anmerkung in den Minkowskischen „Grundgleichungen“ ist hiernach so aufzufassen, daß nur die Methode, nicht das Resultat bei Poincaré ein wesentlich verschiedenes ist.

2) Zur Erläuterung dieser Figur sei folgendes bemerkt. Durch vier Punkte, also auch durch die zwei Geraden $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}$ des R_4 läßt sich stets ein R_3 legen. Die sämtlichen Linien der Fig. 8 verlaufen daher in demselben dreidimensionalen Raum. Und zwar liegen die Linien $OLSA P$ in einer Ebene, die Dreiecke OQT und OTS , sowie das Parallelogramm $LQTS$ je in einer von jener und untereinander im allgemeinen verschiedenen Ebene. Da OS, OT und LQ zu \mathfrak{B}_0 normal sein sollen, so liegt auch die durch T gezogene Parallele zu LQ in der durch O gelegten Normalebene zu \mathfrak{B}_0 ; da diese Normalebene die Gerade \mathfrak{B} nur in dem einen Punkte S schneidet, so geht auch die genannte Parallele durch S hindurch.

und $(\mathfrak{R} \mathfrak{B}_0)/|\mathfrak{B}_0|$ gleich der Projektion OQ von \mathfrak{R} auf \mathfrak{B}_0 . Aus dem bei O rechtwinkligen (in der Figur perspektivisch verschobenen) Dreieck OQT folgt aber weiter

$$(41a) \quad QO/\cos\psi = QT = LS = -(\mathfrak{R} \mathfrak{B}_0)/|\mathfrak{B}_0| \cos\psi.$$

Daher der genannte Zähler nach (40) und (41a) gleich

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B}) \left\{ \mathfrak{R} - \frac{1}{\cos\psi} \frac{(\mathfrak{B}_0 \mathfrak{R})}{|\mathfrak{B}_0|} \frac{\mathfrak{B}}{|\mathfrak{B}|} \right\} \\ &= (\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B}) \left\{ \mathfrak{R} + LS \frac{\mathfrak{B}}{|\mathfrak{B}|} \right\} = (\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B}) \{ \mathfrak{R} + \text{Vektor } LS \}, \\ &= (\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B}) \mathfrak{S}, \end{aligned}$$

da $\mathfrak{B}/|\mathfrak{B}|$ den Einheitsvektor in der Richtung von LS bedeutet und sich die Vektoren \mathfrak{R} und LS nach Fig. 8 zu dem Vektor \mathfrak{S} zusammensetzen. Der Nenner in (40) andererseits ist nach (38a) gleich $c^3 R'^3$, wo R' wie in Fig. 7 den Vektor OP und R' seinen Betrag bedeutet. Somit folgt aus (40) mit Rücksicht auf (41) dem Minkowskischen Vorschlage entsprechend:

$$(41b) \quad \mathfrak{R} = m m_0 \cos\psi \frac{\mathfrak{S}}{R'^3}.$$

Bei dem Poincaréschen Vorschlage (40c) ist der Faktor

$$- (\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B})/c^2 = \cos\psi$$

im Nenner hinzuzufügen und ergibt sich daher:

$$(41c) \quad \mathfrak{R} = \frac{m m_0}{R'^3} \mathfrak{S}.$$

Man bleibt offenbar innerhalb des durch die Poincarésche Untersuchung und durch die Invarianz gegenüber Lorentztransformationen offen gelassenen Spielraumes auch dann, wenn man etwa setzt:

$$(41d) \quad \mathfrak{R} = \frac{m m_0}{S^3} \mathfrak{S} \text{ oder } \mathfrak{R} = \frac{m m_0}{S R'} \frac{\mathfrak{S}}{S},$$

in welchem letzteren Falle sich die Größe $|\mathfrak{R}| = m m_0/SR$ in symmetrischer Weise aus den beiden Abständen zwischen O einerseits und den beiden Gleichzeitigkeitpunkten P und S andererseits berechnen würde. Auch bei dieser symmetrischen Wahl des Kraftgesetzes wäre übrigens dem Reaktionsprinzip noch nicht Genüge geleistet, da sich ja die Richtung der Kraft in unsymmetrischer Weise aus der anziehenden und angezogenen

Masse bestimmt. Die Permanenz dieses Prinzipes würde vielmehr einen in der Umgebung der Attraktionszentren verteilten Impuls erfordern, wie er von der Elektrodynamik her bekannt wäre, jedoch mit dem Unterschiede, daß seine Lokalisierung im Felde hier unbekannt wäre. Dagegen ist die gewöhnliche Formulierung des Newtonschen Gesetzes nach der Relativtheorie offenbar unzulässig. Nach dieser würde Richtung und Größe der Newtonschen Kraft durch einen Punkt A (vgl. Fig. 8) gegeben sein, der mit O im Sinne eines willkürlichen Bezugssystems gleichzeitig und daher physikalisch unbestimmt ist. Praktisch dürfte allerdings diese Formulierung mit jeder der vorangehenden gleichwertig sein, da sie sich wieder nur um Glieder zweiter Ordnung in den Geschwindigkeitsverhältnissen von jenen unterscheidet. Eben aus diesem Grunde wird man aber nicht anstehen, die gewöhnliche Formulierung des Newtonschen Gesetzes zu verlassen und durch eine der vorstehenden, relativ-theoretisch möglichen Formulierungen zu ersetzen.

(Eingegangen 13. Juli 1910.)
