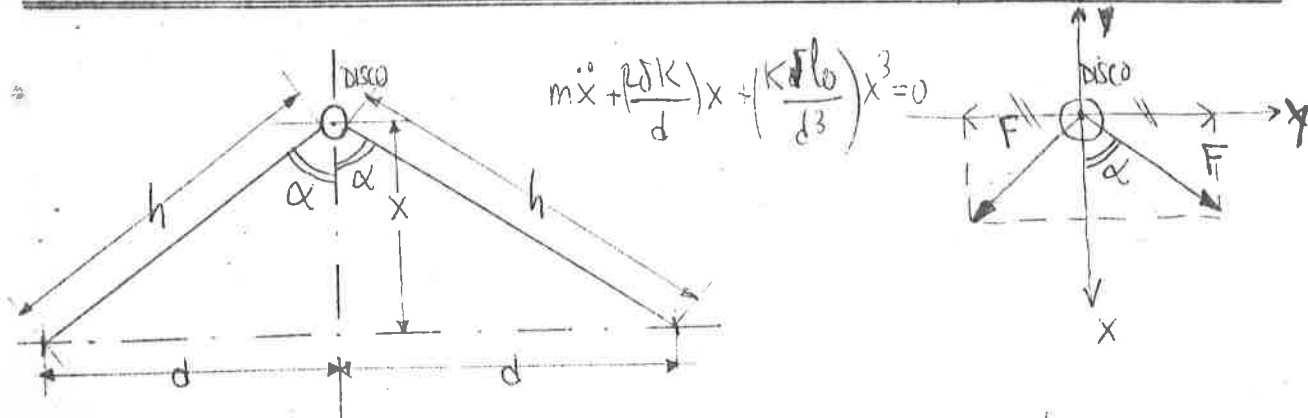


**PRACTICAS DE MECANICA:**

**OSC.  
NO  
LINEAL**

**Jose Enrique Martin Dominguez  
Jose Maria Martin Olalla**

## Obtención de la ecuación calculando la fuerza en dirección $x$ y desarrollándola en serie:



$$m\ddot{x} + \left(\frac{25K}{d}\right)x + \left(\frac{K\sqrt{3}l_0}{d^3}\right)x^3 = 0$$

La fuerza ejercida sobre el disco por cada una de las gomas es proporcional de forma directa a la deformación de la misma, acorde a la ley de Hooke:

$$F = -K(h - l_0).$$

Donde:

$$\begin{cases} K = \text{cte de la goma.} \\ h = \text{longitud de la goma para una distancia } x \text{ desde el punto de equilibrio} \\ l_0 = \text{longitud natural de la goma para } x=0. \end{cases}$$

La componente en el eje  $y$  de una fuerza (ejercida por una goma) se cancela con la de la otra, así pues es la componente en  $x$  de cada fuerza, (se adicionan), la que produce el movimiento del disco en la dirección  $x$ .  $F_x$  viene dada por:

$$F_x = 2F \cdot \cos \alpha =$$

$$= 2K(h - l_0) \cos \alpha =$$

$$\text{Siendo } \cos \alpha = \frac{x}{h}$$

$$\begin{aligned} F_x &= -2K(h - l_0) \frac{x}{h} = -2K \frac{h}{h} x + 2 \frac{K}{h} l_0 x = \\ &= -2Kx + 2 \frac{K}{h} l_0 x. \end{aligned}$$

Al no aparecer  $h$  en la ec. debe eliminarse, sabemos:  $h = \sqrt{x^2 + d^2}$

$$F_x = -2Kx + 2 \frac{K}{\sqrt{x^2 + d^2}} l_0 x.$$

$$F_x = -2Kx + 2 \frac{K}{\sqrt{x^2 + d^2}} lx$$

Aparece en la ec.  $\delta$ , siendo  $\delta = d - l_0 \rightarrow \delta + l_0 = d$ .

$$F_x = -2K \left( \frac{\delta + l_0}{d} \right) x + 2 \frac{K l_0}{\sqrt{x^2 + d^2}} x$$

$$F_x = -2K \frac{\delta}{d} x - 2K \frac{l_0}{d} x + 2 \frac{K l_0}{\sqrt{x^2 + d^2}} x$$

$F_x$  real.  $F_x = m \ddot{x}$  siendo  $\ddot{x}$ : la aceleración en la dirección  $x$  del disco.

$$m \ddot{x} + \left( 2K \frac{\delta}{d} \right) x + \left( 2K \frac{l_0}{d} \right) x - \left( 2 \frac{K l_0}{\sqrt{x^2 + d^2}} \right) x = 0$$

Debe desarrollarse en serie para obtener la ec.

Desarrollando por Maclaurin:  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} = f(x)$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} \right) = \frac{d^2}{(x^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{3}{2} (x^2 + d^2)^{-3/2} \cdot 2x}{(x^2 + d^2)^2} = -\frac{3xd^2}{(x^2 + d^2)^{5/2}}$$

$$f'''(x) = \frac{-\frac{3}{2} d^2 \cdot (-\frac{3}{2}) (x^2 + d^2)^{-5/2} \cdot 2x}{(x^2 + d^2)^4} = \frac{9x^2 d^2}{(x^2 + d^2)^{7/2}}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0) \frac{x^1}{1} + f''(0) \frac{x^2}{2} + f'''(0) \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$f(x) = \frac{x}{d} - \frac{3x^3}{2d^3} + \dots$$

$$m \ddot{x} + \left( 2K \frac{\delta}{d} \right) x - \left( \frac{K l_0}{d^3} \right) x^3 = 0$$

# EFFECTOS NO LINEALES EN OSCILADORES

## Determinación del coeficiente $\alpha$

T (sg)	w (rad/sg)	$\alpha = w^2$
1.309	4.8	23.04
1.264	4.9708	24.788
1.284	4.8934	23.9453
1.328	4.7313	22.3852
1.326	4.7384	22.4524

## Variación de A y w

A (cm)	T (sg)	w (rad/sg)	$\bar{w}$
3.65	0.82	7.66	7.10
	0.85	7.39	
	0.94	6.68	
	0.94	6.68	
7.60	1.10	5.71	5.61
	1.15	5.46	
	1.13	5.56	
	1.10	5.71	
10.95	1.17	5.37	5.39
	1.16	5.41	
	1.17	5.37	
	1.16	5.41	
14.95	1.08	5.81	5.95
	1.03	6.10	
	1.05	5.98	
	1.06	5.93	
18.24	1.02	6.16	6.35
	1.01	6.22	
	0.97	6.48	
	0.96	6.54	

OSCILACIONES FORZADAS

A (cm)	T (sg)	$\bar{T}$ (sg)	w (1/sg)
1.8243	1.700 1.693	1.6965	3.7036
3.3446	1.492 1.493	1.4925	4.2098
4.8649	1.350 1.333	1.3415	4.6837
8.5135	1.249 1.259	1.2540	5.0105
10.7027	1.199 1.222	1.2105	5.1906
11.8581	1.203 1.185	1.1940	5.2623
10.9459	1.164 1.155	1.1595	5.4189
1.3378	1.162 1.152	1.1570	5.4306
0.7905	1.069 1.038	1.0535	5.9641
0.6081	0.985 0.996	0.9905	6.3434
0.3040	0.833 0.842	0.8375	7.5023
2.3108	1.250 1.239	1.2445	5.0488

## PRACTICAS DE MECANICA:

### OSCILADOR NO LINEAL.

### OBSERVACIONES EXPERIMENTALES.

En esta práctica vamos a tratar de observar los diversos efectos no lineales que se pueden producir en un oscilador.

Los efectos no lineal, se producen al introducirse en la ecuación del oscilador términos no lineales, es decir potencias de  $x$  mayores que uno. En el caso que nos preocupa; tal como queda demostrado en el anexo, obtenemos la ecuación:

$$x'' + \alpha x + \beta x^3 = 0$$

Para el caso del oscilador no lineal libre. Además, después, introducimos fuerzas excitadoras externas que inducen el oscilador forzado. En este último caso, la ecuación no será igual a cero, sino por contra, a  $F/m \cos \omega t$ ; que representa la fuerza excitadora externa.

Para empezar las prácticas, anotamos los datos necesarios:

$$\begin{aligned} l &= 41 \text{ cm.} \\ d &= 45 \text{ cm.} \\ m &= 32 \text{ gr.} \\ k &= 7000 \text{ dy/cm} \\ \delta &= 4 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Una vez bien ajustado el montaje, y medidos todos los datos necesarios, iniciamos la practica tomando medidas para amplitudes cortas, obteniéndose la primera de las gráficas que se adjuntan. De ahí sacamos un valor de  $\alpha$ :

$$\alpha = 23.32$$

con un error de:

$$\sigma \alpha = 0.46$$

Luego:

$$\alpha = 23.3 (4) \text{ } 1/\text{sg}^2.$$

## PRACTICAS DE MECANICA:

Iniciamos ahora nuestras medidas para amplitudes mayores, habiendo previamente calculado el valor de  $\beta$  por la fórmula deducida que se adjunta.

$$\beta = 0.098 \quad 1/(\text{sg}^2 \text{cm}^2)$$

Una vez hechas estas medidas, obtenemos una serie de puntos experimentales que se representan gráficamente en la forma  $(w,A)$  donde  $A$  es la amplitud dada al oscilador. (hay que tener en cuenta que si medimos una distancia  $y$ , sobre la mesa, el valor de  $A$  será:  $45y/37$ ). En esta gráfica, intercalamos la gráfica teórica.

Una vez hechas estas medida, iniciamos las medidas del oscilador no lineal forzado. Para ello, introducimos un mecanismo de biela-manivela que fuerza las oscilaciones del oscilador.

Las medidas que debemos tomar, son las necesarias para que recorramos la curva teórica  $(w,A)$ ; que es una cúbica, que al presentar matemáticamente tres soluciones, presenta físicamente diversas discontinuidades. Debemos poner cuidado en estas discontinuidades porque suponen un cambio brusco en la amplitud del movimiento.

Una vez obtenida la nube de puntos  $(w,A)$ , los representamos gráficamente e intercalamos en ellos los resultados de la curva teórica mediante la resolución de la ecuación cúbica:

$$w^2 = \alpha + 3\beta A^2/4 - F_0 A/m$$

donde la incógnita es  $A$ , y  $w$  es un parámetro que hacemos variar en el rango de amplitudes que hallamos obtenidos.

Los valores máximos pedidos de la práctica son:

- Término lineal  $\alpha A(\text{max}) = 276.1 \quad \text{cm/sg}^2$

- Término cúbico  $\beta A^3(\text{max}) = 149.7 \quad \text{cm/sg}^2$

## AUTORES

José Enrique Martín Domínguez  
José María Martín Olalla

(cm)

EX:

EFFECTOS NO LINEALES

TEOR.

x - Curva experimental

(A,  $\omega$ )

o - Curva teorica

(A,  $\omega$ )

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

$$\omega = 233 \text{ (rad/s)}$$

$$\beta = 0.018 \text{ 1/m}^2 \text{ cm}^2$$

x - Puntos medidos

x

x



u)

OSCILACIONES FORZADAS

14  
13  
12  
11  
10  
9  
8  
7  
6  
5  
4  
3  
2  
1

— Gráfica experimental  
-- Gráfica teórica

