

PRACTICAS DE MECANICA:

**OSC.
DE GRAN
AMPLITUD**

**Jose Enrique Martin Dominguez
Jose Maria Martin Olalla**

TABLAS EXPERIMENTALES DE ANGULOS Y PERIODOS

TABLA I

$\theta_1 (^\circ)$	$\theta_{2i} (^\circ)$	$\theta_0 (^\circ)$
10	9 10 9 9 9 9 10 9 10 9	9.65
25	23.5 24 23 23 23 23.5 23 23 23 23	24.1
40	37 38 38 37 37 38 37 38 37 37	38.7
55	51 51 51 50.5 51 51.5 51 51 50 50	52.9
70	65 65 66 64.5 65 65.5 66 64.5 65.5 65	67.6
85	78 79 78.5 78.5 78.5 78.5 78.5 79 78.5 79.5	81.825
100	94 92 92 92 91.5 92 92 92 92.5 92	96.1
115	105 105 104.5 104.5 105 104 104.5 104.5 104.5 104.5	109.8
130	117.5 117.5 118 117.5 118 116 115.5 116.5 117.5 117.5	123.575
145	125.5 127 127 126.5 127 127 125 126 127.5 127.5	135.8
160	134.5 133.5 134 133.5 134 134 135 134.5 133 133	146.95
175	135 137.5 136.5 138.5 138.5 137.5 135 136 136.5 135.5	155.825

TABLA II

$\theta_1 (^\circ)$	T (sg)	\bar{T}
10	5.32 4.78 5.28 5.45 4.9 5.12 5.10 5.12 5.15 4.94	5.116
25	5.15 5.12 5.14 5.28 5.1 5.11 5.10 5.26 5.29 5.18	5.173
40	5.51 5.6 5.53 5.18 5.39 5.51 5.35 5.61 5.59 5.52	5.479
55	5.56 5.4 5.57 5.50 5.46 5.57 5.50 5.57 5.47 5.60	5.514
70	5.8 5.92 5.85 5.69 5.89 5.85 5.86 5.92 5.91 5.77	5.846
85	6.05 6.17 6.17 6.08 6.25 5.96 5.85 5.98 6.1 6.07	6.069
100	6.56 6.71 6.64 6.55 6.52 6.65 6.7 6.66 6.57 6.18	6.342
115	7.21 7.08 6.96 7.2 6.78 7.07 7.01 7.36 7.19 7.11	7.09
130	8.11 7.87 7.8 7.66 7.75 7.71 7.79 7.82 7.87 7.92	7.825
145	8.84 9.02 8.25 8.36 8.88 8.63 8.64 8.25 8.4 8.45	8.572
160	9.57 9.53 9.52 9.60 9.39 9.50 9.7 9.56 9.64 9.38	9.539
170	11.50 10.97 11.14 10.99 10.58 10.95 10.82 11.04 11.01 11.03	11.003

TABLA III

$\theta_1 (^\circ)$	T	$\epsilon \times 0.01$
10	5.116	6.43
25	5.173	2.34
40	5.479	4.27
55	5.514	2.29
70	5.846	2.34
85	6.069	3.70
100	6.342	9.59
115	7.095	5.31
130	7.825	4.06
145	8.572	8.64
160	9.539	6.17
175	11.003	7.33

TABLA IV

$\theta_c/2$	$\pi * T(\theta_c) / (2 * T_c)$	E (sin ($\theta_c/2$))
4.825	1.49 \pm 0.02	1.5736
12.05	1.50 \pm 0.01	1.5883
19.35	1.59 \pm 0.02	1.6168
26.45	1.60 \pm 0.01	1.6588
33.8	1.70 \pm 0.01	1.7195
40.912	1.76 \pm 0.01	1.7981
48.05	1.84 \pm 0.03	1.9019
54.9	2.06 \pm 0.01	2.0325
61.79	2.28 \pm 0.01	2.2069
67.9	2.49 \pm 0.02	2.4159
73.475	2.77 \pm 0.01	2.6782
77.912	3.2 \pm 0.02	2.9716

PRACTICAS DE MECANICA:

ESTUDIO DE LAS OSCILACIONES DE GRAN AMPLITUD DEL PENDULO.

OBSERVACIONES EXPERIMENTALES:

En el estudio de las oscilaciones de un péndulo, es usual encontrarse con expresiones como: "válido para oscilaciones pequeñas". Esto es debido a que aproximamos la ecuación del movimiento del péndulo a la ecuación:

$$\theta''(t) + \frac{m g d}{I} \theta(t) = 0 \quad (1)$$

En esta ecuación, hemos desechados términos superiores a $\theta(t)$: es decir términos cúbicos y mayores; lo cual sólo es cierto si $\theta(t)$ es próxima a cero.

De la ecuación (1), deducimos que el periodo del péndulo para amplitudes pequeñas es:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\left[\frac{I}{m g d} \right]}$$

Si consideramos que el péndulo adquiere amplitudes mayores, obtenemos que:

$$T = 2E(k)T_0/\pi \quad (2)$$

Donde $E(k)$ es una integral elíptica completa de primera especie que se puede aproximar por la expresión:

$$E(k) = (a_0 + a_1 m + a_2 m^2) - (b_0 + b_1 m + b_2 m^2) \ln m \quad m = 1 - k^2$$

Siendo conocidos los coeficientes.

Experimentalmente, procederemos de la siguiente manera. Primero mediremos con exactitud el periodo del péndulo para amplitudes pequeñas, resultando un valor experimental de:

$$T_0 = 5.4 \text{ s}$$

Posteriormente realizaremos diversas medidas para ángulos no próximos a cero obteniendo tablas de θ y T que se adjuntan.

A partir de estos valores experimentales, con sus correspondientes tablas de error, representamos $\pi T(\theta_0)/2T_0$ frente a $\theta_0/2$. El valor teórico de esta representación es $E(k)$ donde $k = \sin(\theta_0/2)$; cuanto más próxima este la gráfica experimental a $E(k)$ habremos obtenido una mejor experiencia.

DISCUSION DE LA GRAFICA EXPERIMENTAL:

A la vista de la gráfica, deducimos que obviamente, ha existido un error experimental. Sin embargo, este error está condicionado por ciertos factores puntuales:

Para ángulos pequeños observamos que el valor teórico es ligeramente menor que el experimental; mientras que para ángulos mayores la tendencia es justamente al contrario. Esto se debe a que en intervalos iguales alrededor del punto de inversión, la velocidad para ángulos pequeños es mayor que para ángulos mayores. Esto motiva que en ángulos pequeños nuestra tendencia sea parar el cronómetro antes de tiempo, mientras que para ángulos mayores es justamente lo contrario.

Se observa así mismo que las gráficas son curvas exponenciales que tienden a $\pi/2$ cuando el ángulo tiende a cero. Se observa también, que la curva crece rápidamente hasta $+\infty$. Además, extendiendo los valores de $\theta_0/2$, observamos que: la curva es periódica y simétrica según la gráfica que se adjunta.

Esto ^{último} tiene una explicación física clara y es que da lo mismo que realicemos la experiencia del péndulo con una vuelta o con más (es decir tomemos θ mayores o menores de 360°). ~~Es~~ ~~periódica por construcción matemática.~~

Sin embargo es interesante preguntarse por el significado físico de esta periodicidad. Esto lo explicamos diciendo que si $\theta > 360^\circ$, nuestro péndulo se sitúa en posiciones correspondientes a oscilaciones de $360 + \theta'$, que según se explicó antes corresponden igualmente a una oscilación de amplitud θ' . El "periodo" de este movimiento es 360° .

Otra cuestión a discutir es la discontinuidad infinita de $E(k)$ para $k = \pm 1$. Esto se explica claramente según la fórmula (2). Si lográsemos colocar el péndulo en una posición $\theta = 360^\circ$, y lográsemos soltarlo con velocidad inicial nula, el péndulo estaría en equilibrio; pondríamos en marcha nuestro cronómetro dispuestos a pararlo cuando volviese el péndulo. Como quiera que idealmente éste no abandona su posición, nunca regresa, y mediríamos un período infinito. De la fórmula (2), deducimos inmediatamente que $E(k)$ vale igualmente infinito. Esta tendencia al infinito es así mismo muy lenta porque sólo en 360° el período es infinito mientras que en un valor distinto, por próximo que sea, al ser un punto de equilibrio inestable, tendera a bajar inmediatamente hacia el origen con un periodo no muy diferente al de cualquier valor distinto de 180° .

DEDUCCION DE LOS COEFICIENTES DEL DESARROLLO DE $E(k)$:

Para deducir experimentalmente los valores de los tres primeros coeficientes vamos a construir un sistema de ecuaciones de tres ecuaciones con tres incógnitas, formado al utilizar valores experimentales de $E(k)$, frente a sus correspondientes θ . Utilizaremos los tres valores con menor índice de error.

$$\theta(1) = 38.7^\circ = 0.6754 \text{ rad.}$$

$$\theta(2) = 67.6^\circ = 1.1884 \text{ rad.}$$

$$\theta(3) = 109.8^\circ = 1.9164 \text{ rad.}$$

Así obtenemos el siguiente sistema:

$$E(1) = 1.59 = \pi/2 \left[1 + a\theta(1)^2 + b\theta(1) + c\theta(1) + \dots \right]$$

$$E(2) = 1.70 = \pi/2 \left[1 + a\theta(2)^2 + \dots \right]$$

$$E(3) = 2.06 = \dots$$

de donde obtenemos los valores:

$$a = 0.0894$$

$$b = -0.1565$$

$$c = 0.0423$$

Que difieren sensiblemente de los valores teóricos debido a dos cuestiones principales. Primero está la fuente de error experimental, y en segundo lugar tenemos el error debido al desprecio de términos superiores a seis que hace que especialmente los dos últimos coeficientes queden muy distorsionados.

CUESTIONES:

1º) ¿Por qué no aparecen en (3) potencias impares de θ ?

Porque en el desarrollo inmediatamente anterior, aparecen los senos elevados al cuadrado.

2º) ¿Qué elongación máxima deberíamos emplear si queremos que el período del ángulo no difiera en más de un 1% del valor de T ?

Planteamos la siguiente relación:

$$\frac{T}{T_0} = 1.01$$

De donde deducimos que:

$$E(k) = \frac{T}{T_0} \pi/2 = 1.01\pi/2 = 1.5865$$

Este valor corresponde a un ángulo θ_0 de:

$$\theta_0 = \underline{22^\circ 48'}$$

En esta primera fórmula, no tiene sentido hablar de un $T_0 > T$ en un 1% porque $E(k)$ tiene un mínimo absoluto para $k=0$. Si utilizásemos esta posibilidad obtendríamos un $E(k)=1.55$; que es menor que $E(0)$. Lógicamente para una amplitud mayor, el período no puede ser menor.

AUTORES

José Enrique Martín Domínguez
José María Martín Olalla

$E(k)$

* G_{ex}/k_B

$$\frac{1}{2} T(\theta_0) = E(k)_{\text{exp}} \text{ and } \text{theoretical}$$

$$E(\sin \frac{\theta_0}{2}) = E(k)_{\text{exp}}$$

$$\text{here } \sin \frac{\theta_0}{2}$$

