

PRACTICAS DE MECANICA:

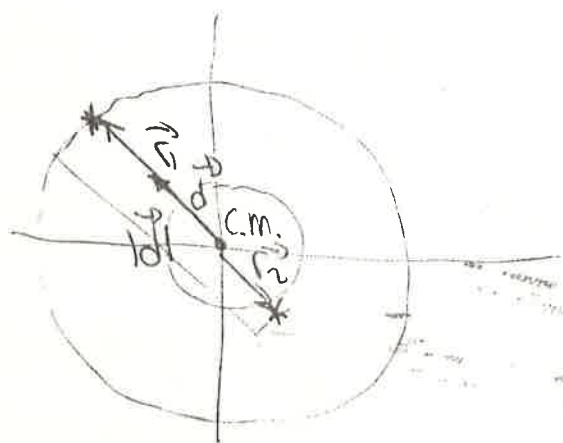
**ORBITAS
EN UN
CAMPO G.**

**Jose Enrique Martin Dominguez
Jose Maria Martin Olalla**

Demostración de la expresión:

$$T = d^{1.5} / (1 + \alpha) \text{ años.}$$

Sea un sistema binario referido a un origen donde se sitúa el centro de masas, realizando un movimiento circular alrededor de dicho punto. Suponer la masa de uno la solar y la del otro planeta o estrella α veces la solar tenemos:



Sabemos que todo movimiento de un sistema binario, es así un problema de campo central, y podemos tratarlo de forma equivalente como una partícula ficticia de masa $\mu = \frac{\alpha m \cdot m}{(\alpha m + m)} = \frac{\alpha m}{(\alpha + 1)}$ girando en torno al centro de masas, en este caso sito en origen.

*) Siendo: $|\vec{d}| = |\vec{r}_1| + |\vec{r}_2|$
 Siendo $|\vec{r}_1|$ y $|\vec{r}_2|$ dist y radio de circunferencia $\Rightarrow |\vec{d}| = d$ y radio de circunferencia.

*) Siendo: $\vec{d} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \Rightarrow \vec{d} \parallel \vec{r}_1 \parallel \vec{r}_2 \Rightarrow$ Al dar un planeta una vuelta la habrá dado el otro y la partícula equivalente. \Rightarrow Puseen el mismo período.

*) Si $m = \text{masa solar}$.

(la ley de Kepler es:

$$\frac{T^2}{d^3} = 4\pi^2 \frac{\mu}{K} = 4\pi^2 \frac{\frac{\alpha m}{(\alpha + 1)}}{G m \alpha m} = \frac{4\pi^2}{G m} \frac{1}{1 + \alpha}$$

$$T = \frac{d^{3/2}}{(1 + \alpha)^{1/2}} \text{ años}$$

\Rightarrow en sistema internacional astronómico.

PRACTICAS DE MECANICA:

PROBLEMAS DE LOS DOS Y TRES CUERPOS.

Tablas de factores de conversion de unidades utilizadas y diversas constantes.

G=	-6.67 (-11) ⁺	$\frac{\text{N m}}{\text{kg}^2}$; Cte de gravitación
m=M(T)=	6 (24)	kg	; Masa Tierra
M(S)=	2 (30)	kg	; Masa Sol
K =	-8 (44)	Nm ²	; K= G*M(T)*M(S)
1 U.A.=	149.5 (09)	m	; Unidad Astronómica
1 A.S.=	31,536,000	sg	; Año Sideral
1 U.A./A.S.=	4,740.6	m/sg	; Conversión U.A./A.S. a m/sg

Diversas fórmulas empleadas:

$$\epsilon = \sqrt{\left[1 + \frac{2 L^2 E}{m K^2}\right]}$$

; Excentricidad

$$B = -mK/L^2$$

; Latus rectum

$$A = \sqrt{\left[\left[\frac{m K}{L^2}\right]^2 + \frac{2 m E}{L^2}\right]}$$

* El paréntesis indica el exponente en base 10. Ag.

$$-6.67 (-11) = -6.67 \cdot 10^{-11}$$

PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS:

En todo el desarrollo de esta práctica vamos a suponer que uno de los dos cuerpos es el Sol (foco de potencial gravitatorio) mientras que el otro es la Tierra.

CASO I: Circunferencia.

Las órbitas circulares corresponden teóricamente al valor mínimo de la energía permitida. En el centro de la misma se sitúa el potencial gravitatorio (Sol) y a una distancia (radio) la estrella errante o planeta (Tierra). Dado un centro, y un punto, sólo existe una circunferencia que tiene como centro el dado y pasa por el punto dado; por lo tanto, fijadas unas posiciones iniciales, sólo existen unas velocidades iniciales que dan lugar a una circunferencia.

Para conseguir esta circunferencia, razonamos de la siguiente manera. Colocamos el Sol en el punto (0,0) y a la Tierra en (1,0). Debemos ahora intuir la velocidad inicial para que la órbita sea circular. Para ello razonamos de la siguiente manera: suponemos que la órbita real de la Tierra es una buena aproximación de circunferencia con lo que su período (1 A.S.) debe ser el de esta circunferencia. Si sabemos el período T, sabemos también que:

$$w = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$$

Con lo que

$$|v| = w \cdot r = 2\pi \text{ U.A./A.S.}$$

Dado que el planeta se encuentra inicialmente en el eje OX, podemos suponer que toda su velocidad se concentra en la componente Y, con lo que las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} P &= (1,0) \quad \text{U.A.} &= (149.5 (9), 0) &\quad \text{m} \\ v &= (0, 2\pi) \quad \text{U.A./A.S.} &= (0, 29786) &\quad \text{m/sg} \end{aligned}$$

Bajo estas condiciones iniciales, podemos calcular ya diversos parámetros físicos y geométricos. Así:

$$V = K/r = -5.35 (33) \text{ Julios}$$

$$E = T + V = -2.68 (33) \text{ Julios}$$

Observamos ya que, como cabía esperar, el valor de la energía es

negativo. Por otra parte su valor teórico es:

$$E = \frac{K}{2r} = -2.6755 \text{ (33) Julios}$$

con lo que, en principio, tenemos un buen valor práctico de la energía.

Otro parámetro físico que podemos calcular es el momento cinético, ya que podemos considerar que la velocidad y el vector de posición son en todo momento perpendiculares aunque la órbita no sea exactamente una circunferencia.

$$L = mrv = 2.67 \text{ (40) kg m}^2/\text{sg}$$

A partir de este dato, podemos calcular también la velocidad aerolar del planeta

$$v_a = \frac{L}{2m} = 2.22 \text{ (15) m}^2/\text{sg}$$

Finalmente, a partir del valor práctico de L, podemos calcular el valor práctico de T:

$$T = \frac{2m\pi r^2}{L} = 1.00068 \text{ A.S.}$$

Cuando el valor teórico es igual a 1 A.S.

Podemos asimismo, comprobar la tercera ley de Kepler, puesto que:

$$\frac{T^2}{a^3} = 2.98 \text{ (-19) sg}^2/\text{m}^3 = 1 \text{ A.S.}^2/\text{U.A.}^3$$

y:

$$= \frac{4m\pi^2}{K} = 2.9608 \text{ (-19) sg}^2/\text{m}^3$$

con lo que queda, a efectos prácticos, comprobada la tercera ley de Kepler.

Finalmente, el último parámetro interesante es la excentricidad, que nos da en buena medida si la órbita es o no una circunferencia. La calculamos en base a la fórmula dada anteriormente:

$$\epsilon = 0.0701$$

Mientras que el valor teórico de ϵ para la órbita circular es cero.

CASO II: Elipse.

Vamos a estudiar ahora el caso en que la órbita sea elíptica en vez de circular. Cabe esperar que los resultados no difieran mucho pues la elipse no es más que una circunferencia deformada.

Para conseguir una elipse, podemos pensar que si colocamos el planeta en la misma posición que en el caso anterior pero le damos más velocidad en el eje Y, el resultado sea una elipse. Así vamos a estudiar la condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} P &= (1,0) \text{ U.A.} \\ v &= (0,8) \text{ U.A./A.S.} \end{aligned}$$

De momento tendremos que:

$$\begin{aligned} V &= K/r = -5.35 \text{ (33) Julios} \\ T &= \frac{1}{2} mv^2 = 4.31 \text{ (33) Julios} \end{aligned}$$

con lo que:

$$E = T + V = -1.04 \text{ (33) Julios}$$

que es un valor negativo y mayor que el de la circunferencia como cabía esperar para una órbita elíptica.

El valor del momento cinético será (teniendo en cuenta que en el punto inicial el vector de posición y el velocidad son perpendiculares):

$$L = mrv = 3.40 \text{ (40) kg m}^2/\text{sg}$$

De donde, la velocidad aerolar será:

$$v = 2.83 \text{ (15) m}^2/\text{sg}$$

Podemos pasar ahora a calcular parámetros orbitales de la elipse. Para ello sabemos que la ecuación en polares de un cónica es:

$$\frac{1}{r} = B \left(1 + \frac{A}{B} \cos \theta \right)$$

Donde B es el **latus rectum** y $A/B = \epsilon$ la excentricidad.

En este caso según las fórmulas dadas al principio:

$$B = 4.15 (-12) \text{ 1/m}$$

mientras que :

$$A = 2.55 (-12) \text{ 1/m}$$

Con lo que:

$$\epsilon = A/B = 0.6138$$

Por otra parte, el semieje mayor de la elipse será:

$$a = K/2E = 3.86 (11) \text{ m} = 2.585 \text{ U.A.}$$

De manera que el semieje menor se calcula en base a:

$$b = a\sqrt{1-\epsilon^2} = 3.04 (11) \text{ m} = 2.038 \text{ U.A.}$$

Por otra parte los valores prácticos calculados de a y b en el ordenador son:

$$a = 2.58 \text{ U.A.}$$

$$b = 2 \text{ U.A.}$$

Una vez calculados a y b, podemos calcular la superficie que encierra la elipse:

$$S = \pi ab = 3.68 (23) \text{ m}^2 = 16.5 \text{ U.A.}^2$$

con lo que podemos deducir el período teórico:

$$T = 2\pi S/L = 129882352.9 \text{ sg} = 4.11 \text{ A.S.}$$

mientras que en la práctica anotamos un valor de $T = 4.22 \text{ A.S.}$

Finalmente, podemos comprobar la tercera ley de Kepler:

$$T^2/a^3 = 2.93 (-19) \text{ sg}^2/\text{m}^3$$

$$-4\pi^2/K = 2.96 (-19) \text{ sg}^2/\text{m}^3$$

CASO III: Parábola.

Estudiemos el caso en que la órbita del planeta sea parabólica; es decir, sea un elipse tan excentrica que la

distancia entre los focos sea infinita. El movimiento en este caso tiene únicamente una distancia apsidal o apocentro; viene del infinito y retorna a él después de pasar por ese apocentro.

Para empezar el estudio de la parábola, podríamos preguntarnos que es lo que determina que una órbita sea parabólica. Hemos visto, que la órbita de la circunferencia, tenía energía negativa, y además, energía mínima. Hemos visto, como en la elipse la energía era mayor, aunque seguía siendo negativa; podemos interpretar, que en el caso límite ($E=0$ y $\epsilon=1$), la órbita se convierte en parabólica, es decir, no es cerrada.

Para buscar una órbita parabólica, utilizamos las siguientes posiciones y velocidades iniciales:

$$\begin{aligned} P &= (4,4) \quad \text{U.A.} \\ v &= (0, -3.742) \text{ U.A./A.S.} \end{aligned}$$

Con estos valores, obtenemos los siguientes datos energéticos:

$$\begin{aligned} V &= K/r = -9.46 \text{ (32) Julios.} \\ T &= \frac{1}{2}mv^2 = 9.44 \text{ (32) Julios.} \end{aligned}$$

con lo que:

$$E = -1.94 \text{ (30) Julios.}$$

Experimentalmente, obtenemos que el radio mínimo es:

$$R = 2.829 \text{ U.A.} = 4.2 \text{ (11) m}$$

mientras que la velocidad en ese punto es:

$$|v| = 5.282 \text{ U.A./A.S.} = 25043 \text{ m/sg}$$

con lo que podemos determinar el momento angular:

$$L = mrv = 6.35 \text{ (4) kg m}^2/\text{sg}$$

A partir de este dato, podemos calcular la velocidad aerolar del planeta

$$v_a = L/2m = 5.29 \text{ (15) m}^2/\text{sg}$$

También podemos calcular la excentricidad, en base a la fórmula dada anteriormente:

$$\epsilon = 0.99796$$

Dado que el valor teórico de la excentricidad para la parábola es de 1, observamos que el error cometido es bastante pequeño; del orden de 0.204%.

Finalmente la ecuación de la parábola es:

$$1/r = 1/a (1 + \cos \theta)$$

Donde $1/a$ es el *latus rectum* (B) de donde:

$$B = A = -mK/L^2 = 1.19 (-12) 1/m$$

$$a = 1/B = -L^2/mK = 8.4 (11) m = 5.62 \text{ U.A.}$$

CASO IV: Hipérbola.

Vamos a estudiar ahora, el último caso posible de órbita en el movimiento de los dos cuerpos: el caso hiperbólico.

El caso hiperbólico se produce cuando la excentricidad de la órbita es mayor que uno; o, físicamente hablando, cuando la energía del movimiento es positiva.

Para obtener la hipérbola vamos a introducir las siguientes posiciones y velocidades iniciales:

$$P = (4, 4) \quad \text{U.A.}$$

$$v = (-0.5, -5) \quad \text{U.A./A.S.}$$

Con estos datos, obtenemos que:

$$V = K/r = -9.46 (32) \text{ Julios.}$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = 1.7 (33) \text{ Julios.}$$

con lo que:

$$E = 7.56 (32) \text{ Julios.}$$

positiva, tal como se había predicho; luego las condiciones iniciales determinan realmente una hipérbola.

Por otra parte, obtenemos experimentalmente que la distancia mínima y la velocidad en ese punto son:

$$r = 2.897 \text{ U.A.}$$

$$|v| = 6.2 \text{ U.A./A.S.}$$

de donde sacamos que:

$$L = mrv = 7.63 (40) \text{ kg m}^2/\text{sg}$$

con lo que la velocidad aerolar será:

$$v_a = L/2m = 6.35 (15) \text{ m}^2/\text{sg}$$

Finalmente, calculamos los diversos parámetros geométricos; así la excentricidad, calculada por la misma fórmula que para la elipse es:

$$e = 1.814$$

con lo que el coseno de la asíntota es:

$$\cos \alpha = \pm 1/e = \pm 0.5512$$

de donde:

$$\alpha = 56^\circ 33'$$

$$\alpha = 123^\circ 27'$$

Por otra parte:

$$a = K/2E = 5.29 (11) \text{ m} = 3.539 \text{ U.A.}$$

Mientras que en la práctica anotamos un valor de:

$$a = 3.559 \text{ U.A.}$$

Finalmente, calculamos A y B según las fórmulas dadas anteriormente:

$$B = 8.24 (-13) \text{ 1/m}$$

$$A = 1.52 (-12) \text{ 1/m}$$

PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS:

Al aparecer un tercer planeta o cuerpo en la interacción anterior, se distorsionan las órbitas obtenidas anteriormente con unas características comunes.

Si el nuevo cuerpo tiene una masa considerable ($\alpha=0.1$) observamos que todas las órbitas anteriores no se cierran y el planeta se escapa. Si el cuerpo tiene una masa ligeramente despreciable ($\alpha=0.01$), su efecto es, lógicamente, menor pero las órbitas tienden también a abrirse.

Finalmente, una consideración acerca de la posición del cuerpo nuevo. Si está muy cerca, ó, por contra, muy lejos, sus efectos perturbadores son mínimos y las órbitas son muy parecidas a las anteriores (este hecho se incrementa, obviamente, si la masa del cuerpo es despreciable).

CUESTIONES:

- 1º) El planeta puede escapar del sistema binario: ¿contradice esto el principio de conservación de la energía?

La existencia de un sistema binario, perturba su espacio próximo generándose un campo, denotable al introducirse en él otro cuerpo. Este campo, dota a los puntos del espacio de un potencial, así, el planeta, posee una energía que al introducirse en él, la transforma en potencial, disminuyendo su velocidad al acercarse al sistema, y aumentándola al alejarse. Al escaparse del sistema el planeta no viola la conservación de la energía porque, si bien disminuye hasta cero su energía potencial, también disminuye hasta cero su aceleración con lo que la variación de T es nulo y por lo tanto $E = T + V = T = \text{Cte.}$

- 2º) ¿Piensa que el sistema binario sería un buen sitio para vivir?

En el caso de un sistema binario, es normal que el tercer cuerpo (el de masa considerablemente menor que la de los otros dos) acabe escapándose de los otros. Esta situación, supondría, la inestabilidad de las condiciones de formación y mantenimiento de vida tal y como las conocemos.

Por ejemplo, una vez escapado del sistema, se produciría,

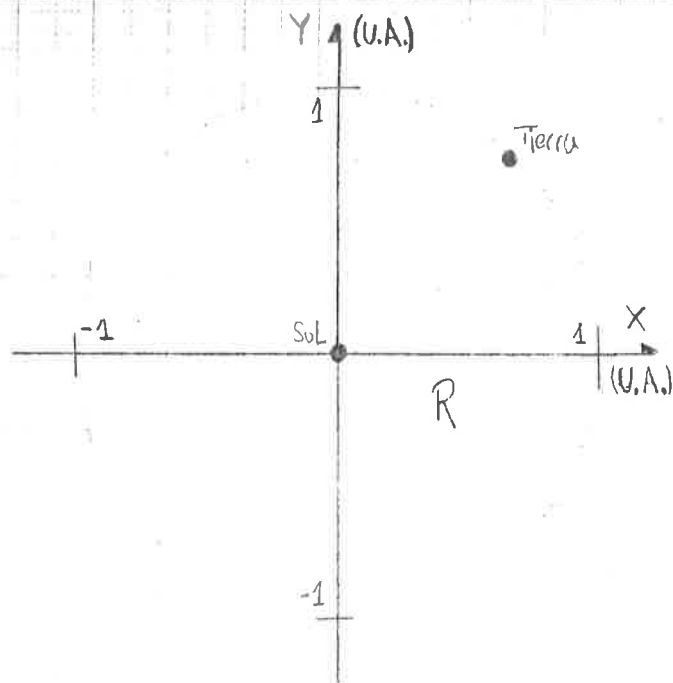
en principio, una ausencia notable de la radiación incidente sobre el planeta; o, al menos, una ausencia de una radiación lo suficientemente intensa como para ser aprovechable.

Sin embargo, hemos visto diversas situaciones donde el planeta quedaba permanentemente atrapado. En este caso, la cosa es más favorable; podríamos pensar en un tipo de vida parecido al nuestro pero con algunas notables diferencias, pues baste citar, por ejemplo, que si los dos cuerpos son capaces de emitir radiación (son estrellas), las noches en el planeta podrían ser contadas y escasas; tampoco cabría hablar de estaciones tal y como las entendemos.

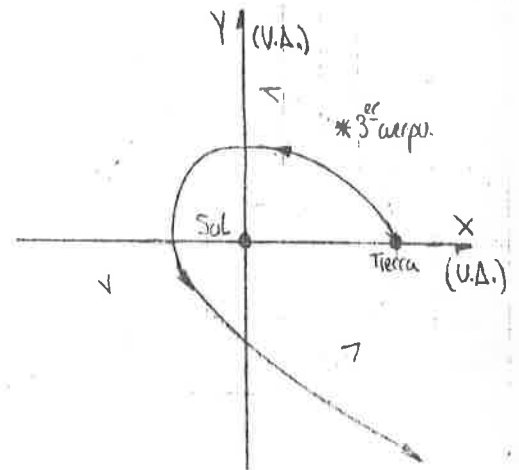
Estas son las conclusiones que podemos sacar de la pregunta, porque la respuesta no es fácil ya que los entendidos en Biología Exterior, nos aconsejan tener ~~una~~ mucha prudencia en cuestiones de este tipo porque condiciones medioambientales (tipo ecológico o tipo astronómico) que a nosotros nos parecen inhóspitas, no lo parecería a "ojos" de seres de otro/s planeta/s.

AUTORES

José Enrique Martín Domínguez
José María Martín Olalla



ÓRBITA CIRCULAR:



R : Radio de la órbita $= 1 \text{ U.A.}$

e : Eccentricidad $= 0$

$(X, Y)_0 = (1, 0)$ \parallel $\alpha = 0$ \parallel $= 1 \text{ A.U.}$

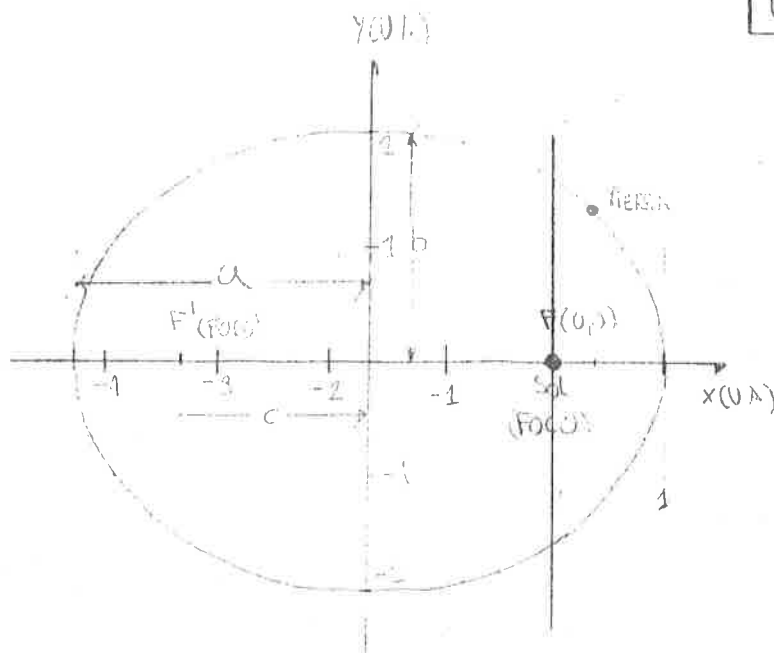
$(X, Y)_1 = (0, -1)$ \parallel $d = 0.1$ \parallel $= 101 \text{ A.U.}$

Situada la estrella o 3er cuerpo a $d = 1 \text{ U.A.}$

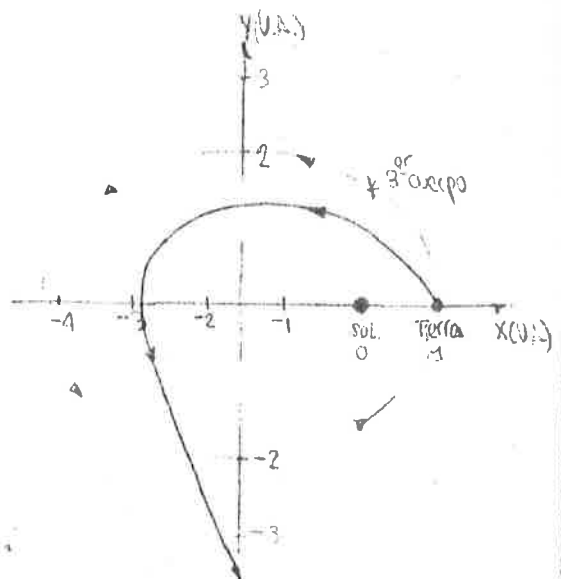
$\alpha = 0,1$

Se muestra la forma de la órbita de la Tierra.

— 0 —



ÓRBITA ELÍPTICA:



Sección transversal b

Radio a

Eccentricidad e

$a = 1$

$e = 0,1$

Velocidad

v

$v = 1$

$v = 1$

Velocidad v

$v = 1$

$v = 1$

Velocidad v

$v = 1$

$v = 1$

Situada la estrella o
3^{er} cuerpo, se observa que
el punto describe la trayectoria
que se ve en el dibujo
distorsionada respecto a la
del problema de los 2 cuerpos.



ÓRBITA HIPERBÓLICA:

Radio Mínimo:

$$r_{min} = 2,897 \text{ U.A.}$$

a: $a = 3,559 \text{ U.A.}$

e: Excentricidad

$$e = 1,814.$$

Semi-distancia focal:

$$e \cdot a = 6,456 \text{ U.A.}$$

$$\begin{cases} (x, y)_0 = (4, 4) \\ (\dot{x}, \dot{y})_0 = (-95, -5) \end{cases}$$

$$\alpha = 56^\circ 33'$$

$$\pi - \alpha = 123^\circ 27'$$

$$t = 0,01 \text{ A.S.}$$

Episodio hiperbola



$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ d = 0,1 \text{ U.A.} \end{cases}$$

Radio
positiva:
 $K < 0$, por
atrativa.